# Jak to było?

Marek KORDOS

Stefan Kulczycki pisze ([3], str. 44–49):
„Rozwiązania babilońskie zawierają pedantyczny rejestr działań, które należy wykonać nad danymi liczbami, aby uzyskać odpowiedź na postawione zagadnienie, nie zawierają jednak nigdy wyjaśnień dlaczego tak, a nie inaczej należy postępować. Apodyktycznie deklarują autorzy tabliczek: takie jest postępowanie. Wskutek tego nie posiadamy znowu autentycznych informacji o toku rozumowania Babilończyków i zdani jesteśmy na domysły interpretujące rachunek Babilończyków jako realizację takiej czy innej myśli przewodniej. Główny pracownik na polu odcyfrowywania i interpretacji tekstów matematycznych babilońskich, O. Neugebauer, posługuje się metodą, [...] która prowadzi do doszukiwania się równoległości do współczesnego rachunku literowego. Metoda Neugebauera budzi obiekcje. [...] W stosunku do zadań stopnia drugiego opinie Neugebauera wywołały sprzeciw S. Gandza, który w stukilkudziesięciostronicowej rozprawie [1] w inny sposób pojmował zadania babilońskie – w sposób, że się tak wyrażę, mniej algebraicznie uczony i bodaj trafniejszy. [...]

Rachunku literowego w niej [algebrze babilońskiej] nie znajdujemy i żadnych wzorów, choćby w postaci słownie ujętych reguł, [...] może poza jednym przypadkiem niedawno wskazanym przez Freudenthala (patrz [6]), który to przypadek jako odosobniony potwierdza regułę. [...]

[Równanie stopnia drugiego traktowane było jak] układ równań z dwiema niewiadomymi, przede wszystkim

$$x+y=a, \quad xy=b;$$
$$x-y=a, \quad xy=b;$$

a także

$$x^2+y^2=b, \quad x\pm y=a;$$

i do tych układów starali się sprowadzić rozmaite inne zagadnienia drugiego stopnia. [...] Jak rozwiązywali układ $x+y=a,\ xy=b$ nie wiemy. Obecnie sprowadza się to do rozpatrzenia równania

$$z^2+pz+q=0,$$

w którym $z^2+pz$ przedstawia się w postaci

$$\left(z+\frac{1}{2}p\right)^2-\frac{1}{4}p^2.$$

Van der Waerden [6] uważa za prawdopodobne, że Babilończycy znali to przekształcenie, ale poparcia na to w tekstach nie widzę. Gandz bardzo obszernie wyłuszcza, że było stałą metodą Babilończyków przyjmowanie jako niewiadomej pomocniczej $\frac{x-y}{2}$. [...]

Na jednej z tabliczek (Alter Orient, Lipsk, 8863, por. [4], str. 108–122) znajduje się rozwiązanie zadania

$$x+y=100=a,$$
$$(x+y)(x-y)+xy=4\,400=c.$$

Rachunek biegnie:

$$100^2=10\,000, \qquad 10\,000-4\,400=5\,600,$$
$$\frac{1}{2}\cdot 100=50, \qquad 50^2=2\,500,$$
$$5\,600+2\,500=8\,100, \qquad \sqrt{8\,100}=90,$$
$$100-90=10,$$
$$\overline{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$
$$50+10=60=x, \quad 50-60=40=y.$$

Jak obliczono tu $x$ i $y$? Najwyraźniej $x=\frac{1}{2}a+10$, $y=\frac{1}{2}a-10$, czyli obliczaną w rzeczywistości niewiadomą było powyższe $\frac{x-y}{2}$ [...]

Drugie zadanie (Vorder-Asiatische Textsammlung Berliner Museum, por. [4], str. 335–340):

$$xy=600, \qquad x^2=9(x-y)^2.$$

Rachunek:

$$\sqrt{9}=3, \qquad 3-1=2,$$
$$3\cdot 2=6, \qquad \frac{1}{6}\cdot 600=100,$$
$$\sqrt{100}=10,$$
$$\overline{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$
$$10\cdot 3=30=x, \qquad 10\cdot 2=20=y.$$

I tutaj obliczaną wielkością jest 10, tzn. $x-y=t=10$, i rachunek biegnie tak; $x^2=9t^2$, $x=3t$, $y=2t$, a więc $3t\cdot 2t=600$ itd.

Może zaciekawić tu komentarz Neugebauera ([5], str. 189). Bierze on

$xy=F$, $\alpha(x-y)^2=x^2$, tzn. $\alpha x^2-2\alpha F+\alpha y^2=x^2$, stąd

$$x^4-\frac{2\alpha F}{\alpha-1}x^2+\frac{\alpha F^2}{\alpha-1}=0,$$

skąd z kolei

$$x^2=F\left\{\frac{\alpha}{\alpha-1}+\sqrt{\frac{\alpha^2-\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)^2}}\right\}=\frac{F\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-1},$$

i ostatecznie

$$x=\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{F}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)}}.$$

Tekst babiloński rachuje w samej rzeczy według tego wzoru. Tymczasem Babilończycy rachowali inteligentniej." [Po czym następuje próba dostrzeżenia w rozwiązaniach różnych równań głębszych prawidłowości.]

Tyle Kulczycki. W tym duchu opowiadałem o problemie babilońskiego rozwiązywania równań kwadratowych na wykładzie. Ciekawe, że studenci byli raczej skłonni przychylać się do opinii, iż poszukiwanie ogólnych reguł rozwiązywania równań kwadratowych – jak chciałby Kulczycki – nie jest w przypadku metod babilońskich sensowne. Nie oznacza to jednak, że podzielają pogląd Neugebauera o wyprowadzaniu wzorów odpowiednich do danego typu równań. Pan Piotr Anders podał algorytm rozwiązujący AO 8863.

Oto on:

$$\begin{matrix}x\\y\end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \left(a - \sqrt{a^2 - c + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right),$$

co dziś uprościlibyśmy do postaci

$$x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - c}, \qquad y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - c}.$$

Stwierdził jednak, że ten wzór jest po prostu sprawozdaniem z umieszczonych na tabliczce obliczeń. Wyraził też pogląd, że spodziewa się, iż do każdego typu równania (wyrażenia mogą się różnić wyrazami stałymi) dobierano empirycznie stosowną metodę – dziś powiedzielibyśmy: wzór albo algorytm.

Jak widać, sformułowany ćwierć wieku temu pogląd Donalda Knutha ([2]; w Polsce kontynuował to Jan Waszkiewicz [7]), że analogii do babilońskiego zajmowania się liczbami należy szukać nie w matematyce, lecz w informatyce (gdzie algorytmów się nie dowodzi, lecz się je testuje), przyjmowany jest obecnie jako naturalny.

**Przywołane prace:**

[1] S. Gandz, *The origin and development of quadratic equation in babylonian, greek and early arabic algebra*, Osiris 3(1937), 405-557.

[2] D.E. Knuth, *Ancient Babylonian algorithms*, [w:] Communications of the ACM, 1972.

[3] S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, Warszawa, 1973.

[4] O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte*, Quellen und Studien A3 (1935-1937).

[5] O. Neugebauer, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, t. I, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.

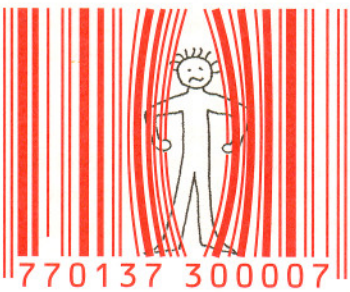
[6] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Groningen 1954.

[7] J. Waszkiewicz, *System informatyczny jako składnik kultury (studium przypadku matematyki babilońskiej)*, Wrocław 1987.

# Zadania

*Redaguje Łukasz WIECHECKI*

Matematyka słynęła z tego, że stosuje się do wielu najróżniejszych dziedzin życia. Tym razem nasze trzy zadania stanowią podwaliny teorii wypleniania chwastów, jakże pomocnej dla działkowiczów.



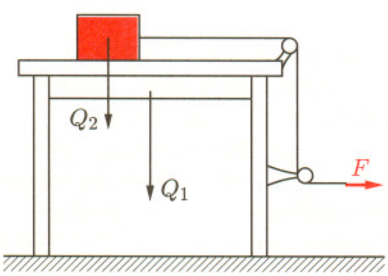

**M 964.** Kwadratowa działka $10 \times 10$ jest podzielona standardowo na 100 kwadratowych części $1 \times 1$. Dziewięć z tych części zarosło chwastem. Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *dwiema* już zarośniętymi. Wykazać, że pole nigdy nie zarośnie w całości chwastem.
Rozwiązanie na str. 16

**M 965.** Kwadratowa działka $7 \times 7$ jest podzielona standardowo na 49 kwadratowych części $1 \times 1$. Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *trzema* już zarośniętymi. Ile początkowo części musi być zarośniętych chwastem, aby po pewnym czasie całe pole było zarośnięte chwastem?
Rozwiązanie na str. 16

**M 966.** Kwadratowa działka $10 \times 10$ jest podzielona standardowo na 100 kwadratowych części $1 \times 1$. Wiadomo, że każdego roku chwast rozprzestrzenia się na te części, które sąsiadują (tzn. mają bok wspólny) z co najmniej *trzema* już zarośniętymi. Udowodnić, że aby po pewnym czasie całe pole zarosło chwastem, początkowa liczba zarośniętych części musi być większa niż 40.
Rozwiązanie na str. 3

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

**F 555.** Neutron zderza się sprężyście z jądrem helu, a następnie (po odbiciu) zderza się sprężyście z drugim jądrem helu. Jądra helu przed zderzeniem były nieruchome. Traktując oba zderzenia jako centralne, wyznaczyć, ilukrotnie zmienia się energia neutronu po zderzeniach.
Rozwiązanie na str. 3




**F 556.** Stół o ciężarze $Q_1 = 150$ N, wyposażony w układ krążków (rys.) może przesuwać się bez tarcia po poziomej podłodze. Na stole leży ciało o ciężarze $Q_2 = 100$ N. Współczynnik tarcia między stołem a ciałem wynosi $k = 0{,}6$. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszał się stół, jeśli z siłą $F = 80$ N pociągniemy za sznur, przymocowany do ciała i przerzucony przez krążki. Siła jest skierowana poziomo.
Rozwiązanie na str. 8