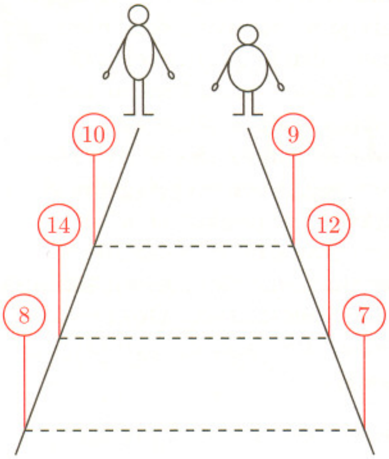
Bolek i Lolek oraz model Lorenza

Witold SADOWSKI

Jeśli Bolek i Lolek w tym samym momencie wyruszają z linii startowej, przy czym w każdym punkcie drogi prędkość Lolka jest mniejsza niż prędkość Bolka w tym samym punkcie drogi (patrz rysunek 1), to Bolek przebędzie większą drogę niż Lolek. Gdybyśmy chcieli zapisać to nieco ściślej, moglibyśmy napisać np. tak:

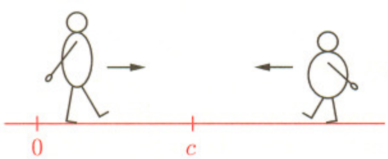
> **Fakt 1.** Niech v_1 oraz v_2 będą prędkościami, z jakimi zmieniają się w czasie wielkości s_1 oraz s_2, odpowiednio. Jeśli w chwili początkowej wielkości s_1 i s_2 są równe: $s_1(0) = s_2(0)$ oraz $v_1(s) \le v_2(s)$ dla każdego s, to $s_1(t) \le s_2(t)$ w każdej chwili $t \ge 0$.



Rys. 1

Rozważmy teraz sytuację, gdy Bolek biegnie z prędkością daną wzorem: $v_2(s) = -s + c$, gdzie c to jakaś stała dodatnia. Jeśli Bolek znajduje się przed punktem c ($s < c$), to biegnie z prędkością dodatnią, czyli w kierunku punktu c (rys. 2). Jeśli natomiast jest za punktem c ($s > c$), to biegnie z prędkością ujemną, czyli... też w stronę c. I chociaż do samego punktu c nie dobiegnie w żadnym skończonym czasie (patrz „Trudności wujka Zenona", *Delta* 6/2000), to łatwo spostrzec, że znajdzie się dowolnie blisko punktu c po odpowiednio długim czasie. Co z tego wynika dla Lolka, którego prędkość spełnia nierówność: $v_1(s) \le -s + c$? Oczywiście to, że po odpowiednio długim czasie Lolek znajdować się będzie tylko w punktach $x < c_1$, gdzie c_1 to dowolna liczba większa od c. Jeśli ponadto założymy, że s nie może osiągać wartości ujemnych (bo np. w $s = 0$ stoi ściana, a linia startowa zaczyna się w pewnym $s > 0$; rys. 3), to nasze spostrzeżenie wyrazić możemy następująco:

> **Fakt 2.** Niech v oznacza prędkość zmiany w czasie wielkości s, przyjmującej tylko nieujemne wartości. Jeśli v spełnia nierówność $v(s) \le -s + c$ dla pewnej stałej $c > 0$, to $s(t) \in [0, c_1]$ dla każdej stałej $c_1 > c$ i dla wszystkich odpowiednio dużych wartości czasów t.

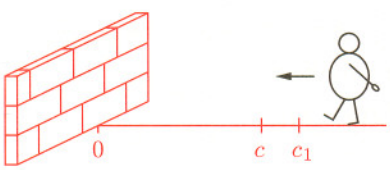


Rys. 2

Innymi słowy, Lolek, biegnący z opisaną wyżej prędkością, wpada po pewnym czasie do odcinka $[0, c_1]$ i już tam pozostaje. Dzieje się tak bez względu na to, skąd Lolek startował.

* * *

Nie byłoby sensu w formułowaniu powyższego faktu, gdyby nie to, że można go wykorzystać nie tylko w odniesieniu do wyścigów biegaczy. Zastosujemy go mianowicie do pewnego układu równań, który stał się symbolem naszych klęsk w przewidywaniu pogody, a wiążąc z sobą modne tematy, takie właśnie jak pogoda, porażka i chaos, zyskał światową sławę. Mowa o modelu Lorenza. Model ten pojawił się przy opisie zjawisk unoszenia ciepłego powietrza w atmosferze. Początkowo układ równań (rozważany jeszcze przez Saltzmana) był dość skomplikowany, Lorenz jednak uprościł go do następującej postaci, w której v_1, v_2, v_3 to prędkości, z jakimi zmieniają się w czasie pewne wielkości s_1, s_2, s_3:



Rys. 3

$$\begin{cases} v_1 = -10s_1 + 10s_2 \\ v_2 = -10s_1 - s_2 + s_1 s_3 \\ v_3 = -\dfrac{8}{3}s_3 - s_1 s_2 + \dfrac{114}{3} \end{cases}.$$

Interesować nas będzie to, co dzieje się z rozwiązaniami, czyli wielkościami $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ wyrażonymi jako funkcje czasu, dla bardzo dużych t. Żeby się tego dowiedzieć, pomnóżmy teraz pierwsze równanie przez s_1 drugie przez s_2, a trzecie przez s_3 i dodajmy stronami. Otrzymamy

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{8}{3}s_3^2 + \frac{114}{3}s_3.$$

Ponieważ $(s_3 - \frac{57}{3})^2 \ge 0$, więc

$$\frac{114}{3}s_3 \le s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2.$$

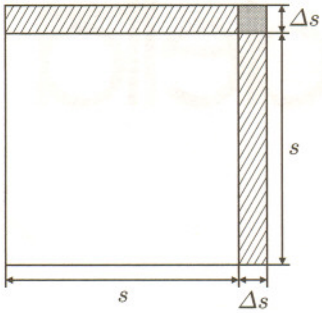
Mamy zatem:

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 \le -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{8}{3}s_3^2 + s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2,$$

Dokładniej: układ, jaki badał Lorenz, miał postać

$$\begin{cases} v_1 = -10s_1 + 10s_2 \\ v_2 = 28s_1 - s_2 + s_1 s_3 \\ v_3 = -\dfrac{8}{3}s_3 - s_1 s_2 \end{cases}.$$

Po podstawieniu zamiast s_3 wielkości $s_3 - 38$ otrzymamy jednak układ rozważany obok.



Rys. 4

czyli

$$s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3 \le -10s_1^2 - s_2^2 - \frac{5}{3}s_3^2 + \left(\frac{57}{3}\right)^2.$$

Stąd

$$(*) \qquad s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3 \le -(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \frac{3249}{9}.$$

Zastanówmy się teraz, co wyraża lewa strona powyższej nierówności, tzn. jakie znaczenie ma iloczyn pewnej wielkości i prędkości jej zmiany: sv. Gdyby s było po prostu drogą, a v prędkością, to taki iloczyn miałby wymiar: metr kwadratowy na sekundę i wyrażałby prędkość zmiany pola. Ta fizyczna intuicja podpowiada, że iloczyn sv powinien mieć jakiś związek z *kwadratem* wielkości s. Jest tak w istocie. Spójrzmy bowiem na rysunek 4.

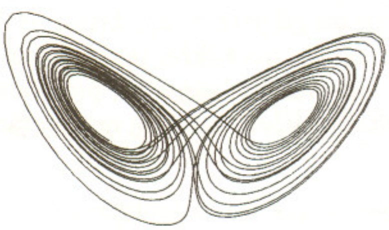
Zakładamy, że wielkość s wzrosła w małym przedziale czasu Δt o Δs. Wtedy przyrost Δs^2 jest równy w przybliżeniu sumie pól dwóch zakreskowanych prostokątów, bo szary kwadracik możemy zaniedbać. Pole jednego z takich prostokątów wynosi $s \cdot \Delta s$. A więc $s \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$, czyli vs, to prędkość zmiany wielkości $\frac{1}{2}s^2$. Korzystając z tego możemy nierówność $(*)$ zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}v(s) \le -s + c.$$

Widać, że otrzymana nierówność różni się od nierówności z faktu 2 o czynnik 1/2. Widać też, że czynnik ten nic istotnego nie zmienia poza tym, że stała c_1 musi być teraz większa od $2c$.

gdzie $s = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, $c = \frac{3249}{9}$, a v to prędkość, z jaką s zmienia się w czasie. Z faktu 2 wynika, że po odpowiednio dużym czasie $s(t)$ znajdzie się w przedziale $[0, R^2]$, gdzie R^2 to jakakolwiek stała większa od c. Zauważmy, że oznacza to, iż punkt tak poruszający się w przestrzeni trójwymiarowej, że jego współrzędne opisują rozwiązanie układu Lorenza w chwili t: $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$, znajdzie się po odpowiednio dużym czasie w kuli o środku w zerze i promieniu R. Uzyskaliśmy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Każda kula $K(0,R)$ o środku w zerze i promieniu $R > \sqrt{2 \cdot \frac{3249}{9}}$ pochłania rozwiązania (s_1, s_2, s_3) układu równań Lorenza, tzn. po odpowiednio długim czasie T punkt $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ należy do $K(0,R)$ dla każdego $t > T$.



Rys. 5

Wiemy już teraz, że rozwiązania układu Lorenza „siedzą” od pewnego momentu w jakiejś kuli. Używając trochę bardziej subtelnych metod, można wykazać więcej: istnieje pewien ograniczony zbiór $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ (rys. 5), który przyciąga rozwiązania (znajdują się one dowolnie blisko tego zbioru po odpowiednio dużym czasie) oraz sam ten zbiór jest niezmienniczy, tzn. gdy w chwili początkowej $(s_1(0), s_2(0), s_3(0)) \in \mathcal{A}$, to $(s_1(t), s_2(t), s_3(t)) \in \mathcal{A}$ dla każdego t. Zbiór $\mathcal{A}$ jest zatem atraktorem. Punkty $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$ poruszają się po nim w bardzo chaotyczny sposób i dlatego nazywany jest on dziwnym atraktorem. Skoro wszystkie rozwiązania zbliżają się do tego zbioru, po pewnym czasie one również zachowują się w sposób chaotyczny. Jak się jednak o tym przekonać, to już zupełnie inna historia.

Rozwiązanie zadania F 555.

Prędkość neutronu po zderzeniu z pierwszym jądrem helu jest wyznaczona z prawa zachowania energii i pędu

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} \quad \text{i} \quad mv = Mu - mv_1,$$

gdzie m – masa neutronu, M – masa jądra helu, v – prędkość neutronu przed zderzeniem, v_1 – prędkość neutronu po zderzeniu z jądrem helu, u – prędkość jądra helu po zderzeniu. Uwzględniając, że $M = 4m$ otrzymujemy $v_1 = (3/5)v$. Wobec tego, przy jednokrotnym zderzeniu neutronu z nieruchomym jądrem helu energia kinetyczna neutronu zmieni się n razy

$$n = \frac{E_k}{E_{k_1}} = \left(\frac{v}{v_1}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

gdzie E_k i E_{k_1} – energia kinetyczna neutronu przed i po zderzeniu. Podczas drugiego zderzenia energia neutronu zmieni się także n razy, czyli

$$\frac{E_k}{E_{k_2}} = n^2 = \frac{625}{81} \quad \text{razy.}$$

Rozwiązanie zadania M 966.

Załóżmy, że na początku n części było zarośniętych chwastem. Zauważmy, że po każdym zarośnięciu jednej części pola długość brzegu zarośniętego obszaru zmniejsza się co najmniej o 2. Po zarośnięciu całego pola długość brzegu obszaru zarośniętego zmniejszy się co najmniej o $2(100-n)$. Ponieważ części w rogu sąsiadują tylko z dwiema częściami, więc muszą one być na początku zarośnięte. Zauważmy, że z dwóch sąsiednich części na brzegu pola co najmniej jedna musi być zarośnięta. Z ostatnich dwóch zdań wynika, że na każdym brzegu pola znajdują się co najmniej dwie sąsiadujące klatki, które są na początku zarośnięte. Stąd na początku długość brzegu obszaru zarośniętego wynosi co najwyżej $4n - 4$. Całe pole ma brzeg długości 100. Wynika stąd, że $(4n-4) - 2(100-n) \ge 40$, czyli $n \ge 40\frac{2}{3}$. Stąd teza.

Uwaga: Czy 41 to najlepsze oszacowanie? A jak to jest dla pól innych rozmiarów?