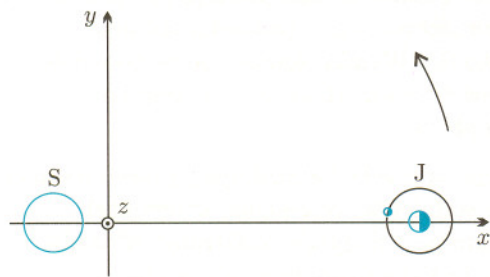


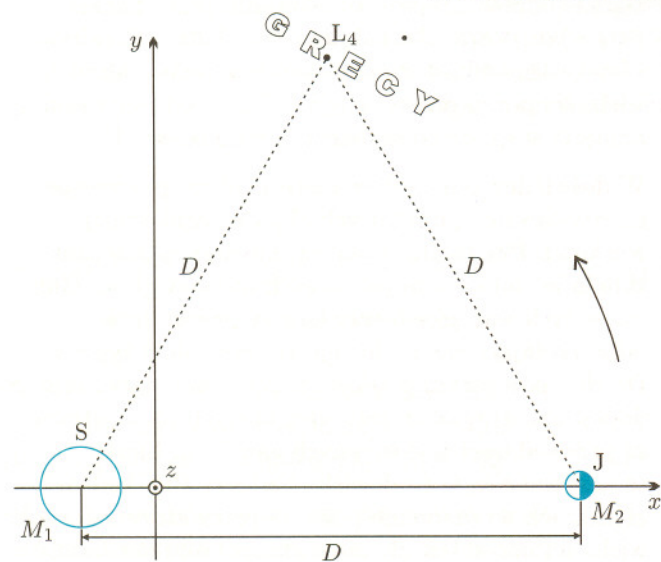
*In medio vero omnium residet Sol* – „W pośrodku zaś wszystkich rozsiadło się Słońce”. To zdanie dotyczące orbit planet zamyka w sobie istotę systemu Kopernika: Słońce stanowi centrum, wokół którego krążą planety. Dzięki ogromnej masie Słońca ruchy ciał Układu Słonecznego odbywają się zgodnie z tym przybliżonym obrazem. Zwykle opisujemy je w układzie odniesienia, który nie wyróżnia żadnego z tych ciał i jest związany z „gwiazdami stałymi”. Dalej będziemy nazywać go „nieruchomym”.

Dla opisu ruchu księżycy jakiejś planety także można wykorzystać wygodny układ odniesienia. Posłużmy się tu przykładem Jowisza, który zdołał zgromadzić wokół siebie około 20 księżyców, tworząc miniaturowy „system planetarny”. Wybierzmy układ współrzędnych nieruchomy względem Jowisza, o początku w środku masy pary Jowisz-Słońce. Jego oś  $x$  skierujemy wzdłuż prostej łączącej te ciała, a osi  $z$  nadajmy kierunek prostopadły do płaszczyzny orbity Jowisza (zwroty osi pokazuje rysunek 1). Tak zdefiniowany układ obraca się względem układu nieruchomego raz na jowiszowy rok. Ponieważ księżyce są znacznie mniejsze od Jowisza, można uznać, że pod wpływem przyciągania planety każdy z nich okrąża go po elipsie.



Rys. 1

Pozostając w płaszczyźnie  $xy$  tego układu, przejdźmy w okolice jednego z dwóch punktów wyznaczających wraz ze Słońcem i Jowiszem trójkąty równoboczne – tego mianowicie, który w układzie nieruchomym wyprzedza planetę o około 1/6 roku (rys. 2). Znajdziemy tam grupę planetoid zwanych Grekami. Pierwszą z nich, Achilleasa, odkrył w 1906 r. M. Wolf. W obracającym się układzie współrzędnych planetoidy także krążą, jednak inaczej niż księżyce: wokół



Rys. 2

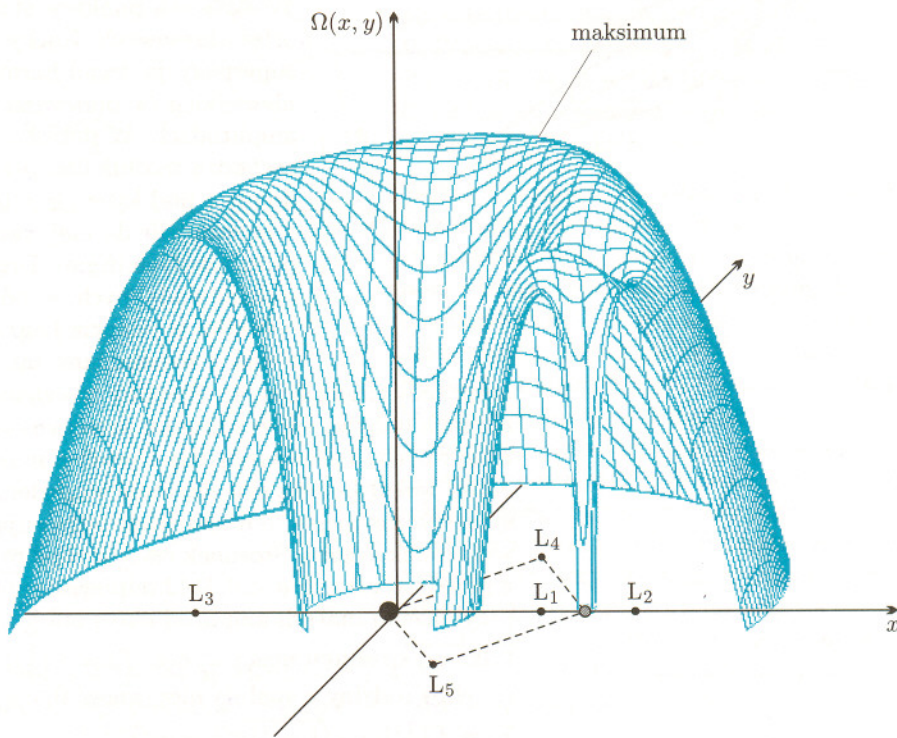
niczego. Poruszają się po torach, wewnątrz których nie ma żadnej centralnej masy. Okrążają tzw. trójkątny punkt libracji, oznaczany zwykle symbolem  $L_4$ . Podobna grupa planetoid – Trojan – skupia się wokół punktu libracji  $L_5$ , w miejscu symetrycznym do  $L_4$  względem osi  $x$ . Istnienie punktów libracji wykazał J.L. Lagrange w 1772 r. w pracy dotyczącej zagadnienia trzech ciał *Essai du probleme des trois corps*. Problem ten, polegający na znalezieniu ruchu trzech mas przyciągających się siłami grawitacji, jest w ogólnym przypadku praktycznie nierozwiązywalny. Lagrange znalazł rozwiązania w przypadkach szczególnych, z których najprostszym jest wariant zwany ograniczonym kołowym zagadnieniem trzech ciał. Zakłada się w nim, że wszystkie trzy ciała poruszają się w jednej wspólnej płaszczyźnie, że jedna z mas  $m$  jest znacznie mniejsza od pozostałych  $M_1$  i  $M_2$ , więc nie wpływa na ich ruch, i że tory tych dwu ciał masywnych są kołowe.

Jednym z rozwiązań szczególnych jest wtedy ruch małego ciała, podczas którego przebywa ono stale właśnie w trójkątnym punkcie libracji. Zazwyczaj ruch małej masy w ograniczonym zagadnieniu trzech ciał bada się w układzie obracającym się jednostajnie, razem z dwoma ciałami masywnymi, ze stałą prędkością kątową, równą tej, jaką mają ciała masywne krążące po okręgach w układzie nieruchomym. Załóżmy, że  $M_1 > M_2$ , wprowadźmy masę zredukowaną  $\mu = M_2 / (M_1 + M_2)$  oraz oznaczmy przez  $D$  odległość między ciałami masywnymi, a przez  $T$  okres ich pełnego obiegu kołowej orbity w układzie nieruchomym (rys. 2). Przyjmijmy też, że będziemy interesować się ruchem ciała „znikomego” tylko w płaszczyźnie  $xy$ .

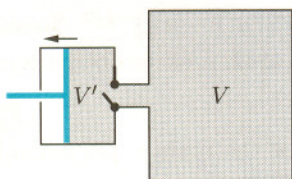
Ruch masy znikomej  $m$  jest konsekwencją działających na nią sił. W układzie obracającym się – a więc nieinercjalnym – oprócz sił przyciągania przez  $M_1$  i  $M_2$  pojawiają się siły bezwładności: odśrodkowa i Coriolisa. Ta ostatnia działa wtedy, gdy prędkość masy  $m$  jest różna od zera. Pole wypadkowej  $\vec{F}$  siły grawitacji i siły odśrodkowej jest nadal polem potencjalnym, tzn. że można

zdefiniować funkcję  $\Omega(x, y)$ , która będzie opisywać energię potencjalną ciała o znikomej masie i zerowej prędkości w opisanym układzie.

Powierzchnię opisaną funkcją  $\Omega(x, y)$  przedstawia rysunek 3. Oczywiście, wypadkowa  $\vec{F}$  sił grawitacji jest ujemnym gradientem funkcji  $\Omega$ , tzn. że siła  $\vec{F}$  jest w każdym punkcie  $(x, y)$  skierowana w stronę spadku funkcji  $\Omega(x, y)$ , a jej wartość jest proporcjonalna do nachylenia powierzchni wyznaczonej funkcją  $\Omega$ .



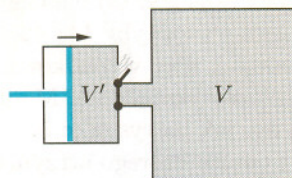
**Rozwiązanie zadania F 553.**  
Rozpatrzmy pierwszy ruch tłoka w lewo:



Ciśnienie gazu zmniejsza się do pewnej wartości  $p_1$ . Z prawa Boyle'a–Mariotte'a

$$pV = p_1(V + V').$$

Podczas ruchu tłoka w przeciwnym kierunku powietrze z komory pompy jest wypychane na zewnątrz:



Oznaczając ciśnienie pod koniec drugiego cyklu przez  $p_2$ , mamy

$$p_1V = p_2(V + V').$$

Z powyższych dwóch wzorów

$$p_2 = p \left( \frac{V}{V + V'} \right)^2.$$

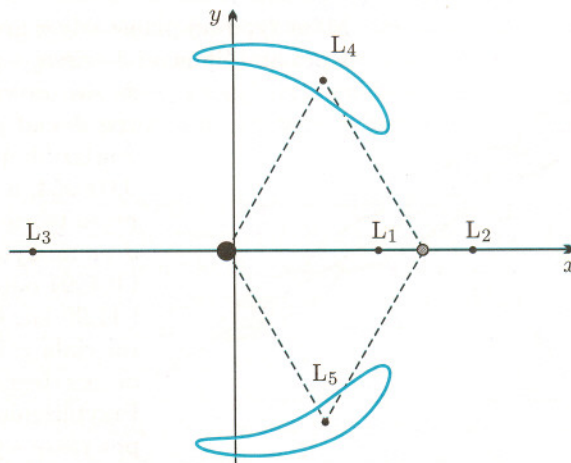
Po  $n$  ruchach tłoka ciśnienie  $p_n$  w naczyniu będzie równe

$$p_n = p \left( \frac{V}{V + V'} \right)^n,$$

a więc obniżenie ciśnienia do  $p_n = p'$  nastąpi po

$$n = \frac{\log \frac{p'}{p}}{\log \frac{V}{V + V'}}$$

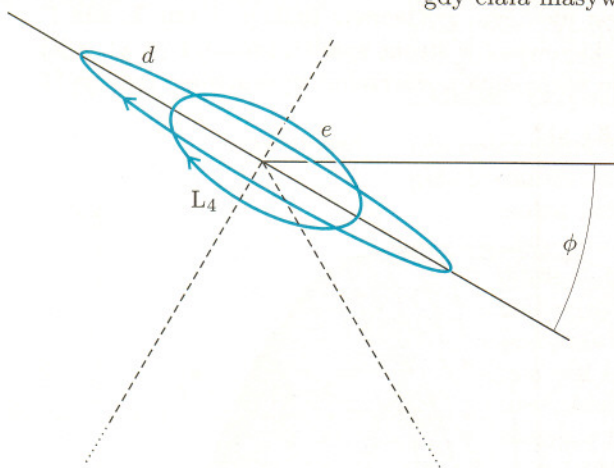
ruchach tłoka.



Rys. 3

Przekroje tej powierzchni poziomymi płaszczyznami  $\Omega = C$  są tzw. krzywymi zerowej prędkości Hilla. Ograniczają one obszary niedostępne dla ciała, którego energia wynosi  $C$ . Na rysunku 3 u dołu pokazany jest przykład takich krzywych. Funkcja  $\Omega(x, y)$  ma pięć ekstremów, w których składowe siły  $\vec{F}$  są równe zero. Wyznaczają one pięć punktów oznaczanych  $L_1, \dots, L_5$ , w których masa znikoma pozostaje w równowadze, a numeracja odpowiada rosnącej energii ciała. Punkty  $L_1, L_2$  i  $L_3$  leżą na osi  $x$  i zwane są współliniowymi. Funkcja  $\Omega(x, y)$  ma w nich siodła. Są one niestabilne w tym sensie, że małe wychylenie z każdego z tych punktów powoduje nieograniczone oddalenie się ciała znikomego. Punkty  $L_4$  i  $L_5$  mają współrzędne  $(D(\frac{1}{2} - \mu), D\sqrt{3}/2)$  i  $(D(\frac{1}{2} - \mu), -D\sqrt{3}/2)$  i zwane są trójkątnymi. Funkcja  $\Omega(x, y)$  ma w nich maksima. Punkty trójkątne mogą być stabilne. Oznacza to, że małe wychylenie z położenia równowagi w  $L_4$  lub  $L_5$

prowadzi do ruchu okresowego wokół tych punktów. Jest to możliwe, jeżeli siła Coriolisa jest przeciwnie skierowana do wypadkowej sił grawitacji i odśrodkowej. Stabilność (podkreślmy: dla małych wychyleń) ma miejsce jednak tylko wtedy, gdy ciała masywne spełniają warunek  $\mu(1 - \mu) < 1/27$ , czyli gdy  $\mu < 0,038521$ .



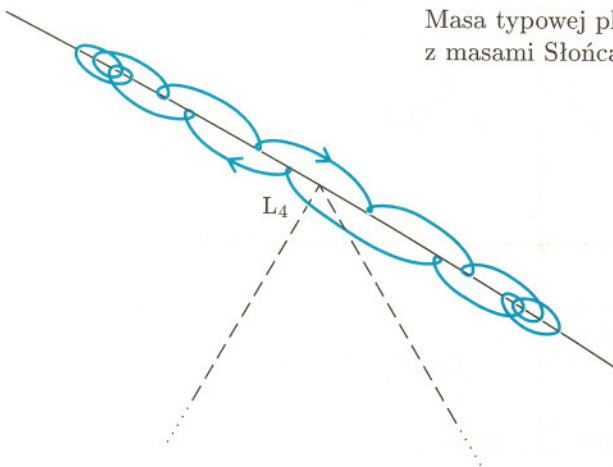
Rys. 4

Teorię niewielkich ruchów – libracji – w bliskim sąsiedztwie punktów Lagrange’a opracował w 1899 r. C.V.L. Charlier. W okolicach punktów stabilnych można spodziewać się orbit okresowych. Ruchy takie mogą być traktowane jako superpozycja drgań harmonicznnych o dowolnych, lecz niewielkich (w porównaniu z odległością od ciał masywnych) amplitudach. W pobliżu np. punktu  $L_4$  dwa z tych drgań zachodzą wzdłuż linii przechodzącej przez  $L_4$  i nachylonej do osi  $x$  pod kątem  $\phi = 0,5 \arctg(\sqrt{3}(1 - 2\mu))$ , a dwa inne – prostopadle do niej; tworzą więc dwie pary wzajemnie prostopadłych drgań. Drgania każdej pary składają się na rodzinę podobnych, współśrodkowych i współosiowych elips o środku w punkcie Lagrange’a, dużych osiach tworzących z osią  $x$  wspomniany kąt i rozmiarach określonych przez

amplitudy drgań (rys. 4). Rodziny te oznaczane są literami  $d$  i  $e$ . Ruch po tych elipsach odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku obiegu ciał masywnych. Tylko wtedy siła Coriolisa może zapewnić stabilność. Odpowiednie elipsy wokół  $L_5$  leżą symetrycznie względem osi  $x$ , ale ruchy po tych torach symetryczne nie są, bowiem także odbywają się w kierunku zgodnym z obrotem wskazówek zegara. Stosunek osi  $b/a$  elips rodziny  $d$  przyjmuje wartości z przedziału  $0 < b/a < 0,4142$  odpowiednio dla  $0 < \mu < 0,038521$ . W przyjętym przybliżeniu małych amplitud okres obiegu po elipsach libracyjnych zależy też tylko od stosunku mas i wynosi  $T_d = T\{\frac{1}{2}[1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}]\}^{-1/2}$ . Stosunek osi elips rodziny  $e$  spełnia nierówność  $0,5 > b/a > 0,4142$ , a okres obiegu wynosi  $T_e = T\{\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}]\}^{-1/2}$ .

Masa typowej planetoidy z grup Trojan i Greków jest tak mała w porównaniu z masami Słońca i Jowisza, a orbita Jowisza tak zbliżona do okręgu,

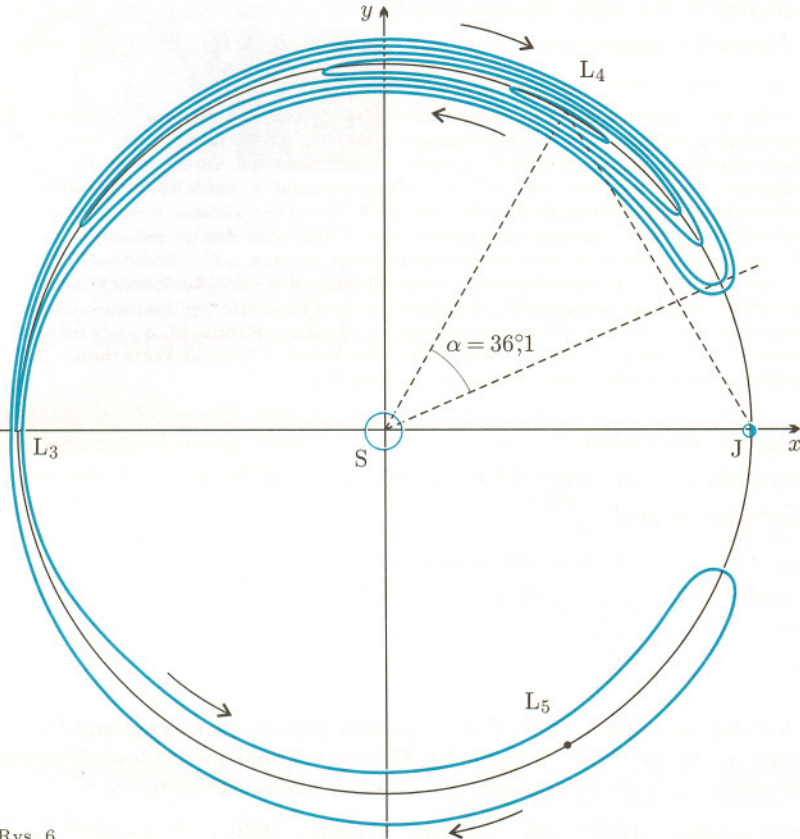
że zastosowanie do nich ograniczonego kołowego zagadnienia trzech ciał jest całkowicie uzasadnione. Dla układu Jowisz-Słońce masa zredukowana Jowisza wynosi zaledwie 0,000954, a więc trójkątne punkty libracji są stabilne. Opisane przez teorię Charliera ruchy mogłyby się zrealizować. Elipsy  $d$  i  $e$  miałyby kształty określone przez stosunki osi 0,05356 i 0,4994 odpowiednio, a okresy obiegu wynosiłyby 147,42 i 11,90 lat. Okresy te są niewspółmierne, więc wypadkowy tor ciała zanikomego byłby krzywą niezamykającą się. Mógłby on przybierać dość zawiły kształt, np. jak na rysunku 5. Przybliżenie małych amplitud, za pomocą którego otrzymano powyższe wyniki, nie jest jednak spełnione dla rzeczywistych ruchów Trojan i Greków. Planetoidy te oddalają się dość



Rys. 5

znacznie od punktów libracji i ich tory nie są superpozycją elips (wychylają się także poza płaszczyznę orbity Jowisza). Są asymetryczne względem punktu  $L_4$ : maksymalne wychylenie w kierunku Jowisza jest mniejsze niż w kierunku przeciwnym. W granicy bardzo małych amplitud tory takie przechodzą w wydłużone elipsy typu  $d$ .

W 1961 r. E. Rabe przeprowadził pierwsze numeryczne obliczenia okresowych torów o dowolnej amplitudzie. Rysunek 6 przedstawia serię takich orbit o coraz większych rozmiarach, sięgających coraz dalej od punktu Lagrange’a  $L_4$  (orbity symetryczne względem osi  $x$  i otaczające punkt  $L_5$  nie zostały narysowane). W kierunku Jowisza planetoida oddala się od punktu libracji o kąt  $\alpha$  sięgający  $40^\circ$ ; w kierunku przeciwnym może oddalić się dowolnie daleko. W granicznym przypadku, gdy  $\alpha = 36^\circ, 1$ , orbita sięga punktu libracji  $L_3$  i łączy się z symetryczną do niej orbitą otaczającą punkt  $L_5$  (co prawda, ruch trudno



Rys. 6

wtedy uznać za okresowy, ponieważ ciało znikome zatrzymuje się teoretycznie w punkcie  $L_3$ ). Po przekroczeniu tego granicznego przypadku tworzy się jedna orbita w kształcie podkowy, otaczająca punkty libracji  $L_4$ ,  $L_3$  i  $L_5$  i obieganą w skończonym czasie. Przypadek ten znalazł potwierdzenie obserwacyjne: w 1997 r. P. Wiegert, K. Innanen i S. Mikkola stwierdzili, że niewielka planetoida 3753 Cruithne odbywa ruch po podkowie w układzie Ziemia-Słońce.

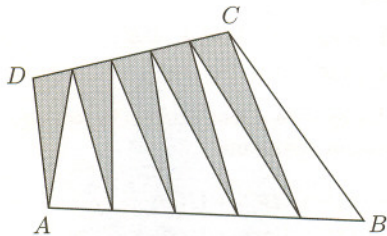
Wokół żadnego ze współliniowych punktów Lagrange'a nie można, oczywiście, spodziewać się trwałego ruchu o naturalnym pochodzeniu. Warto jednak wspomnieć o sondzie SOHO (*Solar and Heliospheric Observatory*), która od 1996 r. okrąża punkt  $L_1$  układu Ziemia-Słońce, położony w odległości około 1,5 mln km od Ziemi, w miejscu, gdzie znika suma przyspieszeń grawitacyjnych obu tych ciał i przyspieszenia odśrodkowego. Ta szczególna lokalizacja sondy zapewnia możliwość ciągłej obserwacji Słońca, nieprzerywanej „zaćmieniami”, które zdarzałyby się, gdyby sonda krążyła wokół Ziemi. Stabilność orbity jest zapewniona

„sztucznie” przez uruchamianie 2–4 razy na rok silników korekcyjnych, co kompensuje powoli narastające odchylenia od nominalnej orbity.

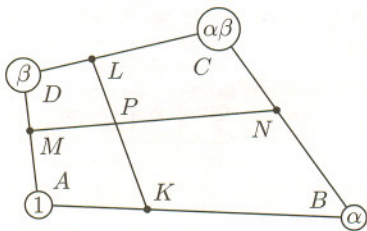
Opisane w tym artykule ruchy ciała znikomego, odbywające się wokół niczego w układzie obracającym się, mają w układzie nieruchomym mniej spektakularny charakter: polegają w gruncie rzeczy na krążeniu wokół Słońca. Orbity nie są jednak krzywymi zamkniętymi i wyglądają na dość nieregularne. Ich wyjątkowy charakter, tj. związek z punktami Lagrange'a, jest widoczny dopiero z układu obracającego się.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na jeszcze jeden przykład ruchu wokół niczego, nie związany z zagadnieniem trzech ciał. Rozważmy ruch np. Jowisza po elipsie okołosłonecznej, ale względem układu odniesienia obracającego się jednostajnie z okresem równym dokładnie jowiszowemu rokowi. W układzie tym Jowisz zmienia odległość od Słońca w granicach od peryhelium do aphelium. Ponadto okresowo oddala się od osi  $x$ , ponieważ wskutek różnicy między swoją prędkością kątową a prędkością kątową obracającego się układu wyprzedza ją lub zostaje za nią w tyle. W efekcie krąży z okresem  $T$  wokół niczego – po eliptycznym epicyklu (podobnym do elips rodziny  $e$ ) o stosunku osi równym 0,5 i ustawionym małą osią w kierunku Słońca. To samo dotyczy oczywiście każdego innego ciała krążącego wokół Słońca po eliptycznej orbicie keplerowskiej, jeśli spojrzeć na nie z układu obracającego się jednostajnie.

**Rozwiązanie zadania M 962.**  
Każdy z powstałych czworokątów podzielmy przekątną na dwa trójkąty: zakreskowany i niezakreskowany.



Jasne jest, że pola trójkątów zakreskowanych, podobnie jak pola trójkątów niezakreskowanych, tworzą ciąg arytmetyczny. Dodając dwa ciągi arytmetyczne, otrzymujemy ciąg arytmetyczny.



**Rozwiązanie zadania M 961.**

W punktach  $A, B, C, D$  umieścimy masy  $1, \alpha, \alpha\beta, \beta$  odpowiednio. Znajdziemy środek masy tego układu na dwa różne sposoby. Środek ciężkości mas  $A(1)$  i  $B(\alpha)$  znajduje się w punkcie  $K$ , a mas  $D(\beta)$  i  $C(\alpha\beta)$  – w punkcie  $L$ . Oznacza to, że środek ciężkości wszystkich czterech mas znajduje się w punkcie  $P'$ , leżącym na odcinku  $KL$  i dzielącym go w stosunku  $\frac{|KP'|}{|P'L|} = \frac{\beta + \alpha\beta}{1 + \alpha} = \beta$ . Rozumując analogicznie stwierdzamy, że środek ciężkości wszystkich czterech mas  $P'$  leży na odcinku  $MN$  i dzieli go w stosunku  $\frac{|MP'|}{|P'N|} = \alpha$ . Wynika z tego równość  $P = P'$  oraz prawdziwość tezy zadania.