Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2001

Przypominamy treść zadań:

316. Wahadło Foucault zawieszone na linie o długości 10 m zostało odchylone od pionu o 1,5 m i puszczone. Jeśli zdarzyło się to w Warszawie, to w jakiej odległości od swojego położenia równowagi przeleci środek masy wahadła?

317. W Kosmosie jest więcej neonu niż argonu, a jednak atmosfera Ziemi zawiera prawie 1% argonu i tylko 0,0018% neonu. Podać możliwe przyczyny tej rozbieżności.

316. Rozwiązując w układzie inercjalnym stwierdzamy, że względem punktu zawieszenia obrót Ziemi (trwający $23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}$) nadał wahadłu początkową prędkość

$$v_1 = \omega_0 R \sin\theta$$

prostopadłą do zasadniczego kierunku ruchu (gdzie ω_0 – prędkość kątowa obrotu Ziemi, θ – szerokość geograficzna Warszawy, R – dane odchylenie początkowe). Maksymalna prędkość wahadła v_2 jest w bardzo dobrym przybliżeniu dana wzorem, wynikającym z zasady zachowania energii $v_2 = R\sqrt{\frac{g}{l}}$, gdzie l – długość liny. Aby znaleźć szukaną odległość r, wystarczy teraz odwołać się do zasady zachowania momentu pędu

$$v_1 R = v_2 r,$$

zatem $r = \omega_0 R\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\theta$. Po podstawieniu $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}} \approx$ $\approx 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\theta = 52^\circ$, otrzymujemy $r = 0{,}11$ mm.

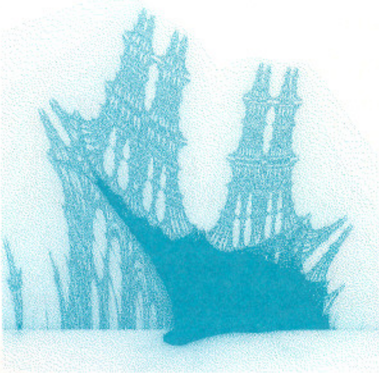
317. Jedną z przyczyn jest fakt, że neon – jako gaz lżejszy – uciekł z atmosfery Ziemi w przestrzeń kosmiczną (zwłaszcza w początkach istnienia Ziemi, gdy temperatura atmosfery była wyższa od obecnej). Drugim – prawdopodobnie ważniejszym – powodem jest stale zachodzący rozpad β^+ izotopu potasu $^{40}\mathrm{K}$, w wyniku czego powstaje izotop $^{40}\mathrm{Ar}$. (To zadanie pochodzi z zawodów im. Leo Szilarda – Węgry).

Paradoksy

Krzysztof OLESZKIEWICZ

Paradoks to rozumowanie prowadzące do sprzeczności (czasem pozornej) z tym, co powszechnie uznawane jest za prawdę. Klasyczny paradoks Epimenidesa, *Kreteńczycy zawsze kłamcy*, polega na tym, że Epimenides też był Kreteńczykiem; gdyby więc mówił prawdę, kłamałby. Jak zauważył Eubulides z Miletu, *Kiedy kłamca mówi, że kłamie, to zarazem kłamie i mówi prawdę.* W języku używanym na współczesnych lekcjach logiki matematycznej można ten paradoks wyrazić nieco inaczej: *Niniejsze zdanie jest fałszywe.* Jeśli zdanie owo jest prawdziwe, to jest fałszywe – i odwrotnie. Nie może więc być ani prawdziwe, ani fałszywe, albo też powszechnie przyjęte rozumienie prawdy i fałszu nie przystaje do tej sytuacji. Ten typ paradoksu wiąże się, oczywiście, z faktem, iż zdanie odnosi się do siebie samego. Możliwe są też nieco inne warianty: *Następne zdanie jest prawdziwe. Poprzednie zdanie jest fałszywe.*

Poniższe rozumowanie nosi nazwę antynomii Russella i obrazuje kłopoty związane z pojęciem zbioru. Rozważmy zbiór T wszystkich tych zbiorów, które nie są swoimi elementami. Czy $T \in T$? Jeżeli $T \in T$, to T nie jest swoim elementem, czyli $\neg(T \in T)$. Jeśli zaś $\neg(T \in T)$, to T jest swoim elementem, a więc $T \in T$. Ta sprzeczność sprawia, że współczesna matematyka narzuca ostre ograniczenia na sposób określania zbiorów. Definicja T nie spełnia tych wymogów, w związku z czym zagrożenie związane z antynomią Russella zostało oddalone. Nie ma jednak pewności, czy w przyszłości nie zostaną odkryte jakieś inne paradoksy godzące w podstawy matematyki; co więcej, z twierdzenia Kurta Gödla wynika, że jeśli nawet w matematyce nie ma sprzeczności, to udowodnić tego nie można. Dowód Gödla w wyrafinowany sposób korzysta z paradoksu kłamcy, ale jest zbyt skomplikowany, by go tu streszczać.



Zbiór Y „ma więcej elementów" niż zbiór X, gdy Y nie jest zbiorem wartości żadnej funkcji określonej na X. Taki sposób porównywania zbiorów ma tę przewagę nad zwykłym liczeniem elementów, że stosuje się także do zbiorów nieskończonych. Na przykład zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nie ma więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych parzystych, ponieważ $\mathbb{N}$ jest zbiorem wartości funkcji: $2n \to n$.

Na koniec zajmijmy się nieco mniej destrukcyjnym zastosowaniem paradoksu kłamcy. Udowodnimy, za Georgiem Cantorem, że każdy niepusty zbiór A ma więcej podzbiorów niż elementów. Istotnie, załóżmy, że każdemu $x \in A$ można przypisać pewien podzbiór $P_x \subset A$, w taki sposób, iż każdy podzbiór zbioru A zostanie przypisany przynajmniej jednemu elementowi A. Niech

$$B = \{x \in A : \neg(x \in P_x)\}.$$

B jest podzbiorem zbioru A, więc $B = P_y$ dla pewnego $y \in A$. Jeżeli $y \in P_y$, to $y \in B$, więc $\neg(y \in P_y)$. I vice versa: jeżeli $\neg(y \in P_y)$, to $\neg(y \in B)$, czyli $y \in P_y$. Otrzymana sprzeczność nie godzi w podstawy matematyki – dowodzi jedynie, że fałszywe było założenie, iż zbiór A ma nie więcej podzbiorów niż elementów.