Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2001

Przypominamy treść zadań:

419. Wyznaczyć największą liczbę α oraz najmniejszą liczbę β takie, że nierówności

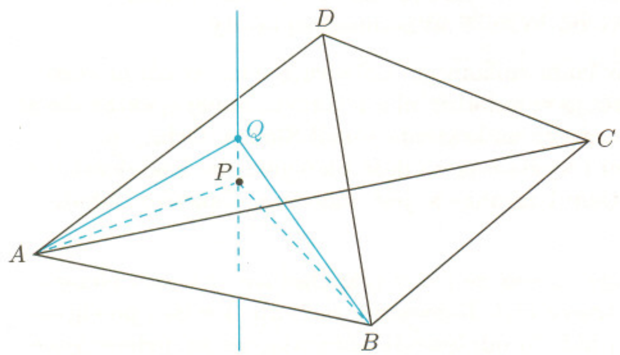
$$\alpha \le \frac{|PA|+|PB|+|PC|+|PD|}{|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD|} \le \beta$$

zachodzą dla każdego czworościanu $ABCD$ i dla każdego punktu P leżącego wewnątrz tego czworościanu.

420. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $a+b=c+d$. Dowieść, że jeżeli nierówność $a^n+b^n > c^n+d^n$ zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n>1$, to zachodzi ona dla każdej liczby naturalnej $n>1$.

419. Weźmy dowolny czworościan $ABCD$ oraz dowolny jego punkt wewnętrzny P. Dodając stronami nierówność $|AB| < |PA|+|PB|$ oraz pięć analogicznych nierówności napisanych dla pozostałych pięciu krawędzi czworościanu stwierdzamy, że

$$|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD| < 3\big(|PA|+|PB|+|PC|+|PD|\big).$$



Możemy przyjąć, że najdłuższą krawędzią czworościanu jest jeden z boków ściany ABC. Oznaczmy jego długość przez d; liczba d jest więc jednocześnie średnicą czworościanu oraz średnicą ściany ABC. Przez punkt P prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i znajdujemy na niej punkt Q należący do czworościanu, najbardziej oddalony od płaszczyzny ABC. Ustalmy oznaczenia wierzchołków trójkąta ABC tak, by Q był punktem ściany ABD. Wówczas

$$|PA|+|PB| < |QA|+|QB| \le |DA|+|DB|,$$
$$|PC|+|PD| < 2d < |AB|+|AC|+|BC|;$$

ostatnia nierówność zachodzi dlatego, że d jest długością jednego z boków trójkąta ABC. Po dodaniu stronami:

$$|PA|+|PB|+|PC|+|PD| < |AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD| < \\ < |AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD|.$$

Z uzyskanych zależności wynika, że dla $\alpha = 1/3$ oraz $\beta = 1$ postulowana nierówność podwójna jest zawsze spełniona. Weźmy teraz czworościan, którego trzy wierzchołki leżą bardzo blisko siebie. Umieszczając punkt P w pobliżu tych wierzchołków bądź też w pobliżu czwartego wierzchołka otrzymujemy dla rozważanego ułamka wartość bliską $1/3$ bądź 1. Zatem liczby $\alpha = 1/3$ oraz $\beta = 1$ dają najlepsze oszacowania zachodzące dla każdego czworościanu i dla każdego punktu wewnątrz niego.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 411 (WT=1,02) i 412 (WT=2,80) z numeru 12/2000

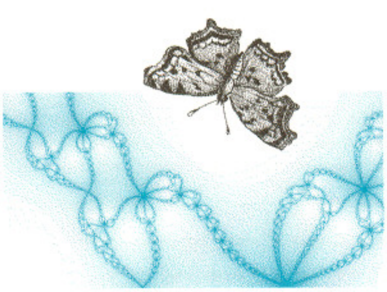
Piotr Kumor	– Olsztyn	43,32
Paweł Kubit	– Kraków	43,24
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	42,01
Janusz Olszewski	– Suwałki	39,40
Witold Bednorz	– Tychy	37,77

420. Jeśli $a+b=c+d=2m$, to zapisujemy liczby a, b jako $m+x$, $m-x$, oraz liczby c, d jako $m+y$, $m-y$, gdzie $0 \le x, y < m$. Wówczas

$$A_n = a^n + b^n = (m+x)^n + (m-x)^n = 2\sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} m^{n-2j} x^{2j},$$

$$C_n = c^n + d^n = (m+y)^n + (m-y)^n = 2\sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} m^{n-2j} y^{2j}$$

i jest jasne, że różnice $A_n - C_n$ mają (dla $n = 2,3,4,5,\ldots$) wszystkie taki sam znak, jak $x-y$. Stąd teza.



Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2001

Przypominamy treść zadań:

316. Wahadło Foucault zawieszone na linie o długości 10 m zostało odchylone od pionu o 1,5 m i puszczone. Jeśli zdarzyło się to w Warszawie, to w jakiej odległości od swojego położenia równowagi przeleci środek masy wahadła?

317. W Kosmosie jest więcej neonu niż argonu, a jednak atmosfera Ziemi zawiera prawie 1% argonu i tylko 0,0018% neonu. Podać możliwe przyczyny tej rozbieżności.

316. Rozwiązując w układzie inercjalnym stwierdzamy, że względem punktu zawieszenia obrót Ziemi (trwający $23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}$) nadał wahadłu początkową prędkość

$$v_1 = \omega_0 R \sin\theta$$

prostopadłą do zasadniczego kierunku ruchu (gdzie ω_0 – prędkość kątowa obrotu Ziemi, θ – szerokość geograficzna Warszawy, R – dane odchylenie początkowe). Maksymalna prędkość wahadła v_2 jest w bardzo dobrym przybliżeniu dana wzorem, wynikającym z zasady zachowania energii $v_2 = R\sqrt{\frac{g}{l}}$, gdzie l – długość liny. Aby znaleźć szukaną odległość r, wystarczy teraz odwołać się do zasady zachowania momentu pędu

$$v_1 R = v_2 r,$$

zatem $r = \omega_0 R \sqrt{\frac{l}{g}}\sin\theta$. Po podstawieniu $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}} \approx$ $\approx 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$, $\theta = 52^\circ$, otrzymujemy $r = 0{,}11$ mm.

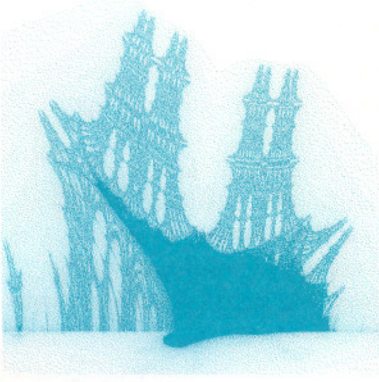
317. Jedną z przyczyn jest fakt, że neon – jako gaz lżejszy – uciekł z atmosfery Ziemi w przestrzeń kosmiczną (zwłaszcza w początkach istnienia Ziemi, gdy temperatura atmosfery była wyższa od obecnej). Drugim – prawdopodobnie ważniejszym – powodem jest stale zachodzący rozpad β^+ izotopu potasu ^{40}K, w wyniku czego powstaje izotop ^{40}Ar. (To zadanie pochodzi z zawodów im. Leo Szilarda – Węgry).

Paradoksy

Krzysztof OLESZKIEWICZ

Paradoks to rozumowanie prowadzące do sprzeczności (czasem pozornej) z tym, co powszechnie uznawane jest za prawdę. Klasyczny paradoks Epimenidesa, *Kreteńczycy zawsze kłamcy*, polega na tym, że Epimenides też był Kreteńczykiem; gdyby więc mówił prawdę, kłamałby. Jak zauważył Eubulides z Miletu, *Kiedy kłamca mówi, że kłamie, to zarazem kłamie i mówi prawdę.* W języku używanym na współczesnych lekcjach logiki matematycznej można ten paradoks wyrazić nieco inaczej: *Niniejsze zdanie jest fałszywe.* Jeśli zdanie owo jest prawdziwe, to jest fałszywe – i odwrotnie. Nie może więc być ani prawdziwe, ani fałszywe, albo też powszechnie przyjęte rozumienie prawdy i fałszu nie przystaje do tej sytuacji. Ten typ paradoksu wiąże się, oczywiście, z faktem, iż zdanie odnosi się do siebie samego. Możliwe są też nieco inne warianty: *Następne zdanie jest prawdziwe. Poprzednie zdanie jest fałszywe.*

Poniższe rozumowanie nosi nazwę antynomii Russella i obrazuje kłopoty związane z pojęciem zbioru. Rozważmy zbiór T wszystkich tych zbiorów, które nie są swoimi elementami. Czy $T \in T$? Jeżeli $T \in T$, to T nie jest swoim elementem, czyli $\neg(T \in T)$. Jeśli zaś $\neg(T \in T)$, to T jest swoim elementem, a więc $T \in T$. Ta sprzeczność sprawia, że współczesna matematyka narzuca ostre ograniczenia na sposób określania zbiorów. Definicja T nie spełnia tych wymogów, w związku z czym zagrożenie związane z antynomią Russella zostało oddalone. Nie ma jednak pewności, czy w przyszłości nie zostaną odkryte jakieś inne paradoksy godzące w podstawy matematyki; co więcej, z twierdzenia Kurta Gödla wynika, że jeśli nawet w matematyce nie ma sprzeczności, to udowodnić tego nie można. Dowód Gödla w wyrafinowany sposób korzysta z paradoksu kłamcy, ale jest zbyt skomplikowany, by go tu streszczać.



Zbiór Y „ma więcej elementów" niż zbiór X, gdy Y nie jest zbiorem wartości żadnej funkcji określonej na X. Taki sposób porównywania zbiorów ma tę przewagę nad zwykłym liczeniem elementów, że stosuje się także do zbiorów nieskończonych. Na przykład zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nie ma więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych parzystych, ponieważ $\mathbb{N}$ jest zbiorem wartości funkcji: $2n \to n$.

Na koniec zajmijmy się nieco mniej destrukcyjnym zastosowaniem paradoksu kłamcy. Udowodnimy, za Georgiem Cantorem, że każdy niepusty zbiór A ma więcej podzbiorów niż elementów. Istotnie, załóżmy, że każdemu $x \in A$ można przypisać pewien podzbiór $P_x \subset A$, w taki sposób, iż każdy podzbiór zbioru A zostanie przypisany przynajmniej jednemu elementowi A. Niech

$$B = \{x \in A : \neg(x \in P_x)\}.$$

B jest podzbiorem zbioru A, więc $B = P_y$ dla pewnego $y \in A$. Jeżeli $y \in P_y$, to $y \in B$, więc $\neg(y \in P_y)$. I vice versa: jeżeli $\neg(y \in P_y)$, to $\neg(y \in B)$, czyli $y \in P_y$. Otrzymana sprzeczność nie godzi w podstawy matematyki – dowodzi jedynie, że fałszywe było założenie, iż zbiór A ma nie więcej podzbiorów niż elementów.