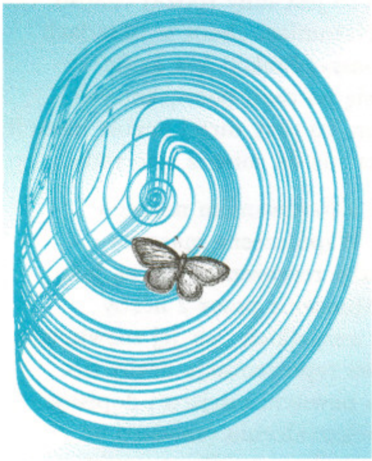
Jak rozpoznać chaos?

Krzysztof BARAŃSKI



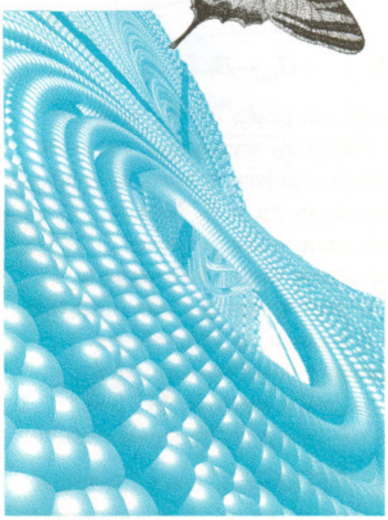
Słowo *chaos* stało się ostatnio niezwykle modne w literaturze popularnonaukowej. Często można usłyszeć o matematyce chaosu, chaosie deterministycznym, układach chaotycznych itd. Chaos kojarzy się z nieuporządkowaniem, bałaganem. Czy tak jest również w matematyce? Co to znaczy, że jakiś układ jest chaotyczny?

Zagadnieniem tym zajmuje się gałąź matematyki zwana teorią układów dynamicznych. Dziedzina ta wyrosła na przełomie XIX i XX wieku z rozważań nad pewnymi problemami mechaniki i równań różniczkowych i bada, najogólniej mówiąc, ewolucję różnych układów w czasie. Z matematycznego punktu widzenia *układ dynamiczny* (z czasem dyskretnym) to pewna przestrzeń X wraz z przekształceniem $f : X \to X$. Ponieważ wartości f leżą w tej samej przestrzeni co argumenty, możemy rozpatrywać wielokrotne złożenia tej funkcji. Oznaczmy $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ razy}}$. Takie złożenie nazywamy *n-tą iteracją przekształcenia* f.

Wygodnie jest przyjąć $f^0(x) = x$. *Trajektorią* lub *orbitą* punktu x nazywamy zbiór $\{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. Interesują nas graniczne zachowania trajektorii punktów przestrzeni X, czyli co dzieje się z punktami, gdy iterujemy przekształcenie f bardzo wiele razy.

Zobaczmy na prostym przykładzie, jaki układ możemy nazwać chaotycznym. Niech na płaszczyźnie S będzie okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1. Każdy punkt $x \in S$ jest jednoznacznie określony przez swoją kątową współrzędną w układzie biegunowym, czyli przez zorientowany kąt α, który tworzy oś OX z odcinkiem łączącym początek układu z punktem x. Określmy przekształcenie $f : S \to S$, przyporządkowując punktowi o kącie α punkt o kącie 2α (pamiętajmy, że utożsamiamy kąty różniące się o wielokrotność 2π). Pozornie wydaje się, że nasze przekształcenie jest tak proste i regularne, iż nie ma tu mowy o żadnym chaosie. Cóż może być łatwiejszego od mnożenia przez 2? A jednak...

Będziemy iterować naszą funkcję. Wyobraźmy sobie, że co sekundę stosujemy przekształcenie f i patrzymy, co stanie się z różnymi punktami po długim czasie. Spójrzmy najpierw na dwa punkty leżące bardzo blisko siebie (odległość między punktami z S wygodnie jest mierzyć przez długość krótszego łuku między tymi punktami). Załóżmy, że odległość ta jest bardzo mała, np. równa $\varepsilon_0 = 0{,}000\,000\,000\,001$, czyli tyle co nic. Jak zmieni się ona po jakimś czasie? Łatwo sprawdzić, że po każdej z początkowych iteracji f odległość między bliskimi punktami wzrasta dwa razy. Po pierwszej sekundzie mamy więc $\varepsilon_1 = 0{,}000\,000\,000\,002$ – w dalszym ciągu tyle co nic. Ale już po 15 sekundach mamy $\varepsilon_{15} = 0{,}000\,000\,03\ldots$, po 30 sekundach $\varepsilon_{30} = 0{,}001\ldots$, a po 40 sekundach ta odległość jest już równa $\varepsilon_{40} = 1{,}099\ldots$ Widzimy, że trajektorie naszych punktów rozbiegły się niezmiernie szybko. Co więcej, gdy nadal będziemy iterować funkcję f, to losy tych punktów mogą być zupełnie różne. Jeden z nich może, na przykład, wpaść w punkt o współrzędnej kątowej 0 i tam pozostać, bo jest to punkt stały przekształcenia f. Drugi zaś może biegać po okręgu S i nigdy nie wracać do wcześniejszych położeń, a jego trajektoria może nawet być gęsta w S, to znaczy odwiedzać każdy niepusty otwarty łuk w S.



Widać stąd, że trajektorie dwóch dowolnie bliskich punktów z S zawsze oddalają się od siebie po pewnym czasie. Ta własność, zwana w teorii układów dynamicznych *wrażliwością na warunki początkowe*, jest jedną z charakterystycznych cech chaosu. Bardzo to niewygodne dla eksperymentatorów – pomiar zawsze jest obciążony pewnym błędem, więc w układzie chaotycznym *nie można* przewidzieć, co stanie się z danym punktem po bardzo długim czasie. Najlepszym przykładem jest tu prognoza pogody. Można nieźle przewidzieć pogodę na jeden, dwa lub trzy dni naprzód, ale nie na miesiąc! Prognozy podawane w środkach masowego przekazu, takie jak „Zima

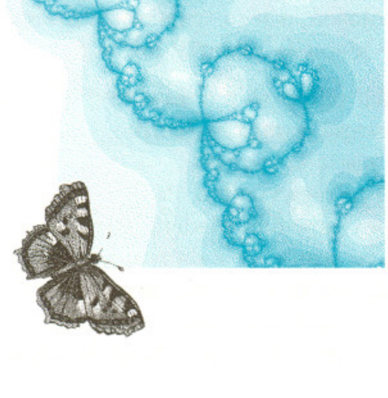
będzie w tym roku mroźna, ale bez śniegu, styczeń będzie ciepły, a luty zimny" to czysta statystyka. No właśnie, statystyka, prawdopodobieństwo… Tam również występuje pewien rodzaj chaosu wynikający z nieprzewidywalności. Nie wiemy, za którym razem wypadnie orzeł przy wielokrotnym rzucie monetą, choć wiemy, że średnio będzie to połowa razy. Ale to jest inny rodzaj chaosu, tak zwany chaos stochastyczny, niedeterministyczny. Natomiast chaos w układach dynamicznych to chaos deterministyczny – wzór naszej funkcji jest ściśle określony, możemy dokładnie wyliczyć, co stanie się po paru początkowych iteracjach przekształcenia. Trudność polega na tym, że przy dużej liczbie iteracji ilość obliczeń rośnie wykładniczo i żaden komputer nie da sobie z tym rady.

Popatrzmy na przykład, jak komputer radzi sobie z iterowaniem naszego przekształcenia, czyli mnożeniem kąta przez dwa. Współczesne maszyny posługują się z reguły arytmetyką dwójkową – liczby reprezentowane są jako ciągi zer i jedynek o pewnej określonej długości. Mnożenie przez 2 liczby w układzie dwójkowym to po prostu przesunięcie wszystkich cyfr jej rozwinięcia o jedno miejsce w lewo. Ale ponieważ komputerowa reprezentacja liczby ma skończoną długość, to ciąg tych cyfr obcina się na pewnym miejscu i dopisuje zera. Zatem po pewnej liczbie iteracji naszego przekształcenia (zależnej od dokładności reprezentacji) okaże się, że wszystkie punkty wpadły w punkt o współrzędnej 0 – oczywisty absurd. Ten przykład, mimo pewnych uproszczeń (komputerowe reprezentacje liczb mogą być bardziej wyrafinowane) pokazuje, że istnieją zasadnicze ograniczenia przy komputerowym modelowaniu układów chaotycznych. Żeby jeszcze wszyscy naukowcy o tym pamiętali…

Wróćmy do naszego przykładu. Kolejną cechą chaosu, o której już wspomnieliśmy, jest *istnienie gęstych trajektorii*. Jak wykazać, że istnieje punkt z S, którego trajektoria odwiedza każdy niepusty otwarty łuk okręgu? Najłatwiej zrobić to za pomocą *kodowania*. Oznaczmy górną połowę okręgu (wraz z punktem o współrzędnej kątowej 0) przez G, a dolną (wraz z punktem o współrzędnej kątowej π) przez D. Każdemu punktowi x na okręgu możemy teraz przyporządkować ciąg $a_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ złożony z zer i jedynek, kładąc $a_n = 0$, gdy $f^n(x) \in G$ i $a_n = 1$, gdy $f^n(x) \in D$. Jest to właśnie nasze kodowanie. Łatwo sprawdzić, że dwa różne punkty po pewnej liczbie iteracji f wpadną w dwie różne połówki okręgu, więc kodowanie to jest różnowartościowe. Widać też, że $a_n(f(x)) = a_{n+1}(x)$, czyli przekształcenie f przesuwa cały kod punktu o jedno miejsce w lewo, obcinając jego pierwszą cyfrę. Ciągi zer i jedynek kojarzą się z rozwinięciem dwójkowym… Rzeczywiście, jak łatwo się przekonać, nasze kodowanie to po prostu rozwinięcie dwójkowe współrzędnej kątowej punktu x podzielonej przez 2π. Możemy teraz znaleźć punkt o gęstej trajektorii. Oznaczmy przez $B_{n,1}, \ldots, B_{n,2^n}$ wszystkie bloki (skończone ciągi) długości n złożone z zer i jedynek. Zauważmy, że punkty o kodzie rozpoczynającym się od $B_{n,k}$ tworzą łuk $I_{n,k} \subset S$ o długości $2\pi/2^n$ oraz $\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} = S$. Spójrzmy teraz na punkt x_0 o kodzie

$$B_{1,1}B_{1,2}B_{2,1}B_{2,2}B_{2,3}B_{2,4}\ldots B_{n-1,2^{n-1}}B_{n,1}\ldots B_{n,2^n}B_{n+1,1}\ldots,$$

czyli na punkt, którego współrzędna kątowa podzielona przez 2π ma właśnie takie rozwinięcie dwójkowe. Ponieważ w kodzie punktu x_0 występują *wszystkie* możliwe bloki oraz f przesuwa kody punktów o jedno miejsce w lewo, trajektoria punktu x_0 odwiedzi *wszystkie* łuki $I_{n,k}$, a więc będzie gęsta w S. Można wykazać, że takich gęstych trajektorii jest nieskończenie wiele, a nawet że większość punktów (ściślej: prawie wszystkie w sensie miary Lebesgue'a na S) ma takie trajektorie. Wynika z tego, że w S istnieje gęsty zbiór punktów o gęstych trajektoriach. Z drugiej strony, punkty o kodach, w których jest skończona ilość jedynek (czyli punkty, które po pewnej ilości iteracji wpadną w punkt o współrzędnej kątowej 0, mający kod złożony z samych zer), też tworzą zbiór gęsty w S. Ich trajektorie na pewno nie są gęste, bo są skończone.



Zauważmy też, że biorąc jakikolwiek nieskończony ciąg złożony z zer i jedynek (na przykład uzyskany losowo przy wielokrotnym rzucie monetą), znajdziemy

Uwaga! Zdanie obok nie jest całkowicie ścisłe. Przy naszej definicji kodowania istnieją pewne nieskończone ciągi złożone z zer i jedynek, które nie są kodami *żadnego* punktu z S. Jakie to ciągi?

punkt w S, którego orbita odwiedza górną i dolną połówkę okręgu w takim porządku, jaki wyznacza ten ciąg.

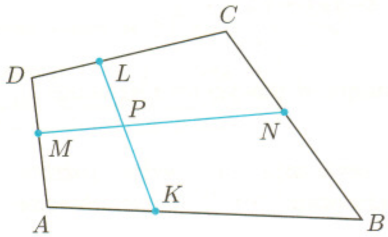
Trzecia cecha chaosu, o której tu wspomnimy, dotyczy *punktów okresowych* przekształcenia f. Punkt okresowy o okresie p to punkt x, dla którego $f^p(x) = x$. Otóż cechą układu chaotycznego jest *występowanie gęstego zbioru punktów okresowych i gęstego zbioru punktów nieokresowych*. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie tej własności w naszym przypadku. Okazuje się przy tym, że f *ma punkty okresowe o wszystkich okresach*, co również jest cechą układu chaotycznego. Z opisanych wyżej własności wynika *niestabilność* naszego układu. Przy dowolnie małej zmianie punktu z S jego zachowanie pod działaniem iteracji f może drastycznie się zmienić.

Widzimy więc, że nasz pozornie prosty układ ma naprawdę skomplikowane własności. Wybierając „losowo" punkt z okręgu, mamy małe szanse przewidzenia jego trajektorii…

Zadania

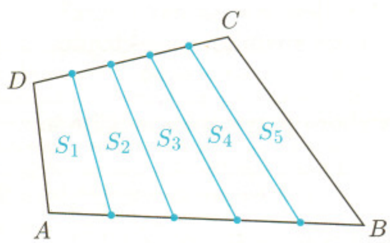
Redaguje Łukasz WIECHECKI

Tym razem wszystko kręci się wokół przeuroczego twierdzenia geometrycznego, którego treść zawarta jest w zadaniu **M 963**. Zadania **M 961** i **M 962** są jego giermkami.



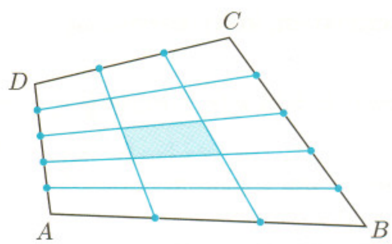
Rys. 1

M 961. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ oraz punkty K, L, M, N położone tak jak na rysunku 1, przy czym wiadomo, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|DL|}{|LC|} = \alpha$ oraz $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \beta$. Udowodnić, że jeśli P jest punktem przecięcia odcinków KL i MN, to $\frac{|MP|}{|PN|} = \alpha$ i $\frac{|KP|}{|PL|} = \beta$.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 2

M 962. Boki AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$ podzielono na k równych części, a następnie odpowiadające sobie punkty połączono odcinkami (rys. 2). Udowodnić, że pola $S_1, \ldots, S_k$ powstałych w ten sposób czworokątów tworzą ciąg arytmetyczny.
Rozwiązanie na str. 13

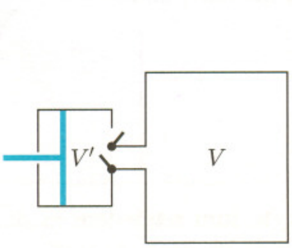


Rys. 3

M 963. Boki AB i CD czworokąta $ABCD$ podzielono na m, a boki BC i AD – na n równych części, gdzie m i n są liczbami nieparzystymi. Następnie połączono odcinkami odpowiadające sobie punkty na przeciwległych bokach (rys. 3 dla $m = 3,\ n = 5$). Udowodnić, że pole środkowego, powstałego czworokąta jest mn razy mniejsze niż pole czworokąta $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 8

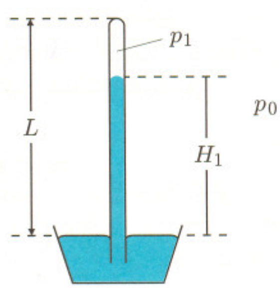
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 553. Naczynie o objętości V połączone jest z pompą tłokową, w której objętość komory wynosi V' (rys. 4). Ile ruchów tłokiem należy wykonać, aby ciśnienie w naczyniu zmniejszyło się od p do p'. Ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0, zmiany temperatury można zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 11



Rys. 4

F 554. Do rurki barometru rtęciowego dostał się pęcherzyk powietrza, w wyniku czego przy ciśnieniu atmosferycznym p_0 i temperaturze T_0 wysokość słupa rtęci w rurce zmniejszyła się do H_1 (rys. 5). Ile wynosi ciśnienie atmosferyczne (w mm Hg), jeśli w temperaturze T wysokość słupa rtęci w uszkodzonym barometrze wynosi H?
Rozwiązanie na str. 4



Rys. 5