8/01 (44)

Γlimatias

DLACZEGO? (II/3)

Czy zauważyłeś, Drogi Czytelniku, jak poprzednio mówiłem o cyfrze jedności, a unikałem określenia „ostatnia cyfra"? To dlatego, że liczba a_{2040} ma cyfrę jedności równą 9, ale nie ma ostatniej cyfry. Mamy bowiem

$$a_{2040} = 89364\ldots83119{,}97204\ldots,$$

gdzie przed przecinkiem jest $32721\ldots40831$ cyfr. Ta ostatnia liczba jest 4049-cyfrowa, tzn.

$$10^{10^{4048}} < a_{2040} < 10^{10^{4049}}.$$

Tak, liczba a_{2040} nie jest całkowita! **DLATEGO** jej cyfra jedności jest, mówiąc szczerze, całkiem losowa. Siódemki na miejscu jedności utrzymują się do 2039-tego wyrazu ciągu, gdyż wtedy wyrazy ciągu są całkowite. Wyraz 2040-ty jest pierwszym wyrazem niecałkowitym. Odpowiedziałem na pytanie, **DLACZEGO** na miejscu jedności liczby a_{2040} nie ma siódemki, ale powstało nowe pytanie: **DLACZEGO** liczba a_{2040} nie jest całkowita, **DLACZEGO**?

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (26′)

Wyjaśnienie oszustwa (26):

Nie jest prawdą, że zawsze $BC' > BC$ (rys. 1). Jednak podany dowód można łatwo poprawić. Jeden sposób to założenie, że kąt przy wierzchołku C jest nieostry (założenie takie można poczynić bez szkody dla ogólności rozumowania). Wówczas nierówność $BC' > BC$ jest prawdziwa. Drugi sposób to wykorzystanie nierówności trójkąta

$$BC' + C'C > BC,$$

która daje: $AB + CD = AB + C'D + C'C =$
$= AD + BC' + C'C > AD + BC.$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (25′)

Wyjaśnienie oszustwa (25):

Nierówność, chociaż „udowodniona", nie jest prawdziwa. Najprostszy kontrprzykład otrzymujemy dla $n = 2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, kiedy to dana nierówność sprowadza się do $1 \le \frac{1}{2}$. Funkcja f nie jest wypukła! Widać to wyraźnie na wykresie (rys. 2). Funkcja f nie ma drugiej pochodnej w zerze, gdyż nie ma tam nawet pierwszej pochodnej. Ma natomiast pochodne jednostronne $f'(0_-) = 1$ i $f'(0_+) = -1$.

W poprzednim Γ-limatiasie stwierdziliśmy, że f ma w zerze obie pochodne jednostronne drugiego rzędu i że są one równe. Aby wywnioskować na tej podstawie istnienie pochodnej drugiego rzędu, musimy wiedzieć, że istnieje pochodna rzędu pierwszego, ta jednak w zerze nie istnieje. Ponieważ funkcja f nie jest dwukrotnie różniczkowalna, nie można wnioskować o jej wypukłości na podstawie dodatniości drugiej pochodnej. Druga pochodna funkcji f w zerze nie istnieje, pomimo że można sensownie mówić o $f''(0_+) = f''(0_-) = 2$, o ile przyjmiemy definicję

$$(5\clubsuit) \qquad g''(x_+) = \lim_{h \to 0_+} \frac{g'(x+h) - g'(x_+)}{h}$$

zamiast

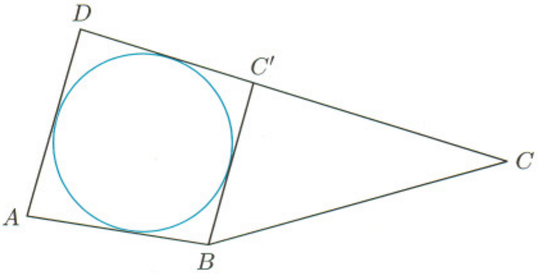
$$g''(x_+) = \lim_{h \to 0_+} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h}$$

i podobnie dla pochodnych lewostronnych.

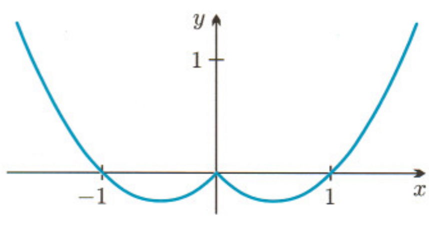
Definicja $(5\clubsuit)$ jest użyteczna, gdy chcemy badać funkcję g na przedziale domkniętym $[a, b]$ i rozważać jej pochodne jednostronne na końcach tego przedziału. Pamiętać trzeba jednak, że przy tak przyjętej definicji istnienie pochodnej rzędu k w punkcie wewnętrznym x tego przedziału nie wynika tylko z istnienia i równości pochodnych jednostronnych $g^{(k)}(x_-)$ i $g^{(k)}(x_+)$, ale wymaga także istnienia wszystkich pochodnych funkcji g w punkcie x aż do rzędu $k-1$.

Dodać należy, że nieistnienie pochodnej drugiego rzędu nie przesądza o braku wypukłości, o czym świadczy przykład funkcji $F(x) = x^2 + |x|$ (rys. 3). Funkcja F nie ma drugiej pochodnej w zerze, ale jest wypukła.

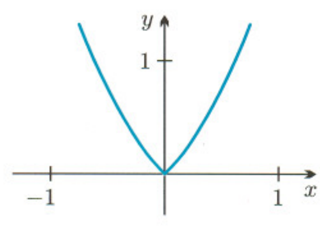
JWR



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl