Twierdzenie Guldina

Piotr ŻMIJEWSKI

Środek masy trójkąta i środek masy jego wierzchołków pokrywają się. Środki masy okręgu i koła o tym samym środku i promieniu również są identyczne. A środek masy półokręgu i środek masy półkola nim ograniczonego? Pokrywają się? A jeśli nie, to który z nich leży dalej od środka okręgu?

Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważmy, że na ogół wyznaczanie położenia środka masy różnych brył wymaga stosowania rachunku całkowego. Istnieją jednak pewne triki, które pozwalają czasem tego uniknąć. Jeden z takich trików oparty jest na następującym twierdzeniu Guldina:

> *Jeśli obracamy płaską, jednorodną i spójną (w jednym kawałku) figurę F względem osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej wnętrza F, to objętość powstającej bryły jest iloczynem pola figury F i drogi, jaką przebył jej środek masy.*

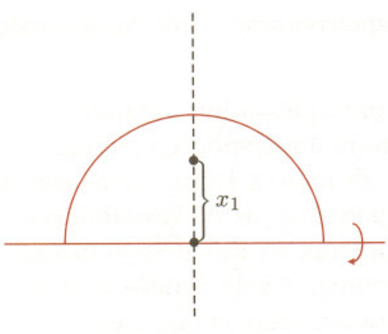
Jak łatwo zauważyć w przypadku przesuwania krzywej otrzymamy twierdzenie:

> *Jeśli obracamy płaską, jednorodną i spójną krzywą względem osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej tej krzywej, to pole (S) powstającej powierzchni jest iloczynem długości (L) tej krzywej i drogi (s), jaką przebył jej środek masy.*

Twierdzenie to jest w istocie konsekwencją twierdzenia Guldina, gdyż można traktować krzywą jako bardzo wąską (o szerokości $\mathrm{d}x$) figurę płaską. Wtedy jej pole powierzchni jest $L \cdot \mathrm{d}x$, a objętość powstającej bryły wynosi $S \cdot \mathrm{d}x$. Z twierdzenia Guldina mamy: $S\mathrm{d}x = L\mathrm{d}x \cdot s$, co daje $S = Ls$.

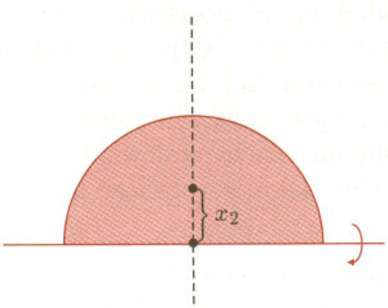
Twierdzenie Guldina służy zazwyczaj do wyznaczania objętości i pól powierzchni brył, można jednak skorzystać z niego przy wyznaczaniu środka masy.

Pewna rzecz wymaga tutaj wyjaśnienia. Stosowanie pojęcia środka masy dla figur trójwymiarowych jest zupełnie jasne, ale mówienie o środku masy figur jednowymiarowych lub dwuwymiarowych może wzbudzać wątpliwości. Przecież nie mają one objętości, a więc nie powinny mieć również masy! Z fizycznego punktu widzenia, gdy mówimy np. środek masy koła o promieniu r, mamy wtedy na myśli punkt, do którego dąży środek masy jednorodnego walca o promieniu r i wysokości H, gdy H dąży do 0. Przykładowo środki masy okręgu lub koła wygodnie sobie wyobrażać jako środki masy jednorodnego, cienkiego (o stałym przekroju) drutu wygiętego w ten sposób, że przypomina okrąg lub kawałka jednorodnej, cienkiej (o stałej grubości) blachy w kształcie koła.



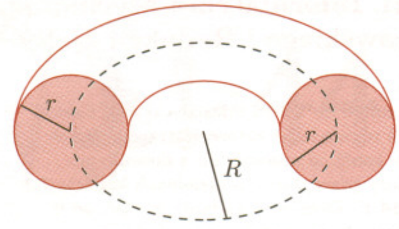
Rys. 1

Wróćmy teraz do naszego początkowego problemu i spróbujmy znaleźć położenie środka masy jednorodnego półokręgu o promieniu r. Wiadomo z symetrii, że środek masy leży na prostej przechodzącej przez środek półokręgu i prostopadłej do średnicy półokręgu (ta prosta jest jedyną osią symetrii rozważanej figury). Wystarczy więc znaleźć odległość x_1 środka masy od środka średnicy półokręgu (rys. 1). Jeśli półokrąg obrócimy wokół średnicy tak, aby powstała sfera, to środek masy poruszać się będzie w czasie tego obrotu po okręgu o promieniu x_1, przebędzie więc drogę $2\pi x_1$. Zgodnie ze sformułowanym wcześniej twierdzeniem, iloczyn tej drogi i długości półkola jest równy polu powierzchni powstającej sfery, tzn. $2\pi x_1 \cdot \pi r = 4\pi r^2$, stąd dostajemy $x_1 = \frac{2}{\pi} r$.



Rys. 2

Rozważmy teraz jednorodne półkole o promieniu r. Środek masy tej figury leży na jej osi symetrii, tzn. na prostej prostopadłej do średnicy półkola i przechodzącej przez środek tej średnicy (rys. 2). Gdy obracamy to półkole wokół średnicy, powstaje kula o objętości $\frac{4}{3}\pi r^3$, a środek masy przebywa drogę $2\pi x_2$. Pole półkola wynosi $\pi \frac{r^2}{2}$, więc zgodnie z twierdzeniem Pappusa mamy $\frac{2\pi x_2 \pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$ stąd $x_2 = \frac{4}{3\pi} r$. Warto zauważyć, że $x_1 > x_2$.



Rys. 3

Na koniec podajmy jeszcze jeden przykład pokazujący, że twierdzenie Guldina może służyć w pewnych przypadkach do wyznaczania objętości brył. Rozważmy jednorodne koło o promieniu r. Jego środek masy leży, oczywiście, w środku koła. Wyobraźmy sobie teraz, że koło porusza się w przestrzeni w ten sposób, że jego środek zatacza okrąg (prostopadły do koła w punkcie przecięcia z kołem w każdej chwili ruchu) o promieniu R. Powstaje w ten sposób dętka rowerowa, czyli torus (rys. 3). Objętość V tego torusa zgodnie z twierdzeniem Guldina jest iloczynem pola powierzchni przemieszczanego koła i drogi, jaką przebył jego środek masy, zatem: $V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$ Udało się więc wyprowadzić wzór na objętość torusa w prosty sposób, bez skomplikowanego całkowania. Rozważając analogiczne przesuwanie okręgu, możemy łatwo otrzymać następujący wzór na pole powierzchni torusa $S = 4\pi^2 Rr$.

`http://www.gimps.w.pl` Liczba pierwsza Mersenne'a to liczba pierwsza postaci $2^n - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

GIMPS czyli Wielkie Internetowe Poszukiwanie Liczb Pierwszych Mersenne'a ma na koncie wiele rekordów Guinnessa – już czterokrotnie w ramach tego matematycznego programu badawczego odkrywano największe znane podówczas liczby pierwsze. Obecna rekordzistka ma ponad dwa miliony cyfr! Co zrobić, aby zostać odkrywcą kolejnej ogromnej liczby pierwszej? Wystarczy odwiedzić stronę **`http://www.gimps.w.pl`**, z której można ściągnąć za darmo najnowsze oprogramowanie do poszukiwania tych kolosów.

Jak go używać, dowiemy się z prosto napisanego przewodnika. Wystarczy jedynie trochę szczęścia i można zostać kolejnym wielkim odkrywcą! Każdy zainteresowany matematyką zapewne chętnie zapozna się z rezultatami badań liczb pierwszych lub ściągnie rozwinięcia dziesiętne 38 liczb pierwszych Mersenne'a. Wśród atrakcji jest także możliwość subskrypcji biuletynu z najświeższymi informacjami o liczbach pierwszych i GIMPS. Autor strony zaprasza!

Krzysztof WILKOSZ

`http://www.gimps.w.pl` Liczba pierwsza Mersenne'a to liczba pierwsza postaci $2^n - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 958. W wierzchołku A_1 dwunastokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{12}$ stoi znak minus, a w pozostałych plusy. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków stojących przy dowolnych sześciu kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Wykazać, że za pomocą takich operacji nie da się dojść do sytuacji, w której przy A_2 stoi minus, a przy pozostałych wierzchołkach – plusy.
Rozwiązanie na str. 6

M 959. W wierzchołku A_1 dwunastokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{12}$ stoi znak minus, a w pozostałych plusy. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków stojących przy dowolnych czterech kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Wykazać, że za pomocą takich operacji nie da się dojść do sytuacji, w której przy A_2 stoi minus, a przy pozostałych wierzchołkach – plusy.
Rozwiązanie na str. 7

M 960. W wierzchołkach piętnastokąta foremnego o środku O rozstawiono plusy i minusy. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków wszystkich znaków stojących przy wierzchołkach pewnego k-kąta foremnego o środku O ($k \in \{3, 5, 15\}$). Udowodnić, że istnieje takie rozstawienie znaków, że nie da się go za pomocą powyżej opisanych operacji otrzymać wychodząc ze zbioru samych plusów.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 551. Obliczyć stałą grawitacji przyjmując, że promień Ziemi jest równy $R = 6370$ km, przyspieszenie ziemskie g=9,81 m/s^2, a średnia gęstość Ziemi wynosi $\rho = 5{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 8

F 552. Wyznaczyć masę Słońca, gdy znany jest okres obiegu Ziemi dookoła Słońca T i promień orbity ziemskiej r.
Rozwiązanie na str. 8