7/01 (43)

# Γ-limatias

## DLACZEGO? (II/2)

Dziś tylko krótkie pytanie:

**DLACZEGO** cyfrą jedności liczby $a_{2040}$ jest 9? Przecież cyfry jedności wszystkich liczb $a_n$ dla $3 \le n \le 2039$ są siódemkami. A końcówki dwu-, trzy- i czterocyfrowe też wykazują daleko idącą regularność.
**DLACZEGO** ta regularność nagle się psuje, **DLACZEGO**?

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (25)

TWIERDZENIE: Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| .$$

*Dowód:* Dana w treści twierdzenia nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - |x_i|\right) ,$$

czyli

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - |x_i|\right) ,$$

co daje się zapisać w postaci

$$(4♠) \qquad f(x_0) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) ,$$

gdzie $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ oraz $f(x) = x^2 - |x|$. Tak określona funkcja $f$ jest ciągła. Ponadto dla $x \ge 0$ mamy $f(x) = x^2 - x$, skąd $f''(x) = 2$, przy czym w zerze funkcja $f$ ma prawostronną pochodną rzędu drugiego równą 2. Podobnie dla $x \le 0$ mamy $f(x) = x^2 + x$, skąd $f''(x) = 2$, a przy tym w zerze funkcja $f$ ma lewostronną pochodną rzędu drugiego równą 2. Ponieważ pochodne drugiego rzędu lewo- i prawostronna w punkcie zero są obie równe 2, zatem $f''(0) = 2$, skąd ostatecznie $f''(x) = 2 > 0$ dla każdego $x$. Zatem $f$ jest wypukła i na mocy nierówności Jensena zachodzi (4♠), czego należało dowieść.

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (26)

TWIERDZENIE: W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków czworokąta są równe.

*Dowód:* Załóżmy, że w czworokąt można wpisać okrąg. Wtedy z równości czterech par odcinków zaznaczonych na rysunku 1 wynika równość $AB + CD = AD + BC$, co kończy dowód wynikania w jedną stronę.

W celu przeprowadzenia dowodu drugiego wynikania załóżmy, że dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB + CD = AD + BC$. Wykażemy, że można wpisać w niego okrąg. Wpiszmy w kąt $BAD$ okrąg zawarty w czworokącie i styczny do jednego z boków $BC$ lub $CD$ (bez szkody dla ogólności możemy założyć, że jest to bok $CD$). Okrąg taki uzyskujemy przecinając dwusieczną kąta $A$ dwusiecznymi kątów $B$ i $D$, a następnie biorąc za środek okręgu punkt przecięcia bliższy wierzchołkowi $A$ (rys. 2). Jeżeli okrąg jest styczny do boku $BC$, dowód jest zakończony. W przeciwnym przypadku prowadzimy z punktu $B$ styczną do okręgu, aż do przecięcia $C'$ z bokiem $CD$ (rys. 3). Wówczas w czworokąt $ABC'D$ jest wpisany okrąg, zatem na mocy już udowodnionej części twierdzenia

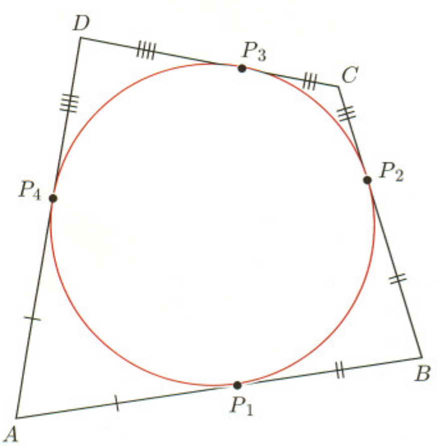
$$AB + C'D = AD + BC' .$$

Ponieważ $DC' < DC$ oraz $BC' > BC$, otrzymujemy

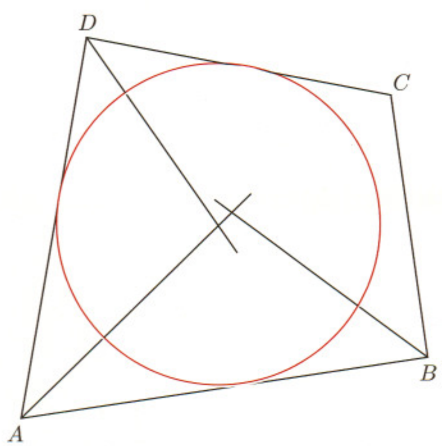
$$AB + CD > AB + C'D = AD + BC' > AD + BC$$

wbrew założeniu. Dowód twierdzenia jest zakończony.

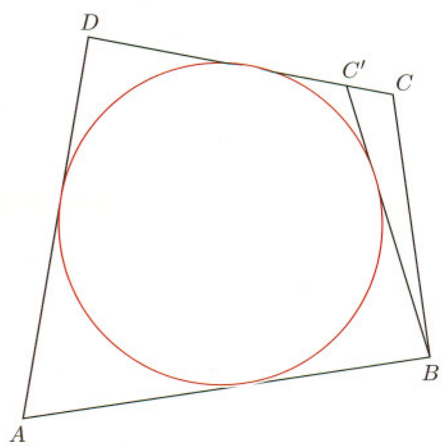
*JWR*




Rys. 1




Rys. 2




Rys. 3

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl