Twierdzenie Kroneckera

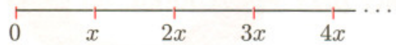
Konrad PIÓRO

Liczbę rzeczywistą x możemy przedstawić w postaci sumy liczby całkowitej i liczby rzeczywistej leżącej pomiędzy 0 i 1. Dokładniej, niech $[x]$ będzie największą liczbą całkowitą nie większą od x i niech $u(x) = x - [x]$. Wtedy $0 \le u(x) < 1$ i $x = [x] + u(x)$.

Więcej informacji o liczbach rzeczywistych można znaleźć w artykule R. Sikorskiego „Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?”, *Delta* 1/1974, przedruk w *Delcie* 6/1998.

Zauważmy, że x wyznacza następujący zbiór liczb leżących w przedziale $\langle 0,1)$

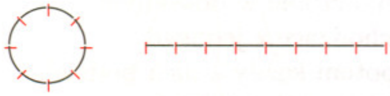
$$(*) \qquad u(x), \quad u(2x), \quad u(3x), \quad u(4x), \ldots$$



O zbiorze tym możemy myśleć następująco. Najpierw zaznaczamy na prostej punkty $x, 2x, 3x, \ldots$, a potem nawijamy wszystko na okrąg o długości 1. W ten sposób punkty nx i mx, dla których $u(nx) = u(mx)$, pokryją się. Następnie możemy okrąg rozerwać w zerze, czyli w miejscu w którym nałożyły się liczby naturalne, i wyprostować w odcinek jednostkowy. Teraz zbiór $(*)$ już widać (rys. 1).

Rys. 1

Jeśli $x = a/b$ jest liczbą wymierną, to $u(na/b) = na/b - [na/b]$ musi być jedną z liczb $0, 1/b, 2/b, \ldots, (b-1)/b$ i zbiór $(*)$ zawiera tylko skończoną liczbę różnych elementów (rys. 2, dla $x = 1/8$).



Rys. 2

Niech teraz x będzie liczbą niewymierną. Wtedy w ciągu $(*)$ nie występują dwie takie same liczby. Gdyby bowiem $u(kx) = u(lx)$ dla pewnych różnych liczb naturalnych k i l, to $kx - [kx] = lx - [lx]$, więc $(k-l)x = [lx] - [kx]$, i w konsekwencji $x = \big([lx] - [kx]\big)/(k-l)$ jest liczbą wymierną. Oczywiście również $u(nx) \neq 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

Twierdzenie Kroneckera pokazuje, jak zbiór $(*)$ jest „położony” w otwartym odcinku $(0,1)$.

Twierdzenie. *Dla dowolnej liczby niewymiernej x zbiór $(*)$ jest gęsty w $(0,1)$, tzn. dla każdych liczb $\alpha < \beta$ z przedziału $\langle 0,1\rangle$ istnieje taka liczba naturalna k, że $\alpha < u(kx) < \beta$.*

Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

Dla liczb wymiernych to nie jest prawda, ponieważ wtedy zbiór $(*)$ jest skończony. Stąd wynika, że gęstość zbioru $(*)$ w odcinku $(0,1)$ charakteryzuje liczby niewymierne. Dokładniej, następujący odwrotny rezultat jest także prawdziwy: *jeśli zbiór $(*)$ jest gęsty w $(0,1)$, to x jest liczbą niewymierną.*

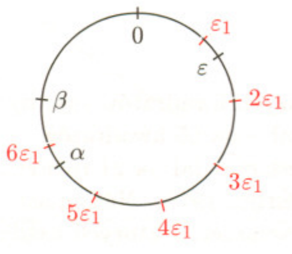
W dowodzie będziemy potrzebowali następującego faktu:

Lemat. *Niech x będzie liczbą rzeczywistą, a ε dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wtedy istnieje taka liczba wymierna a/b, że $|x - a/b| < \varepsilon/b$, lub równoważnie, istnieją takie liczby całkowite a oraz $b \ge 1$, że $|bx - a| < \varepsilon$.*

Lemat mówi zatem, że dla dowolnego ε istnieje takie całkowite b, że po nawinięciu na okrąg punkt bx wyląduje w odległości od zera nie większej niż ε.

Udowodnimy najpierw Twierdzenie Kroneckera. Niech x będzie liczbą niewymierną. Weźmy dowolne liczby $0 \le \alpha < \beta \le 1$. Niech $\varepsilon = \beta - \alpha$. Wtedy na mocy lematu istnieją takie liczby całkowite $n \ge 1$ i k, że $|nx - k| < \varepsilon$. Rozpatrzmy następujące dwa przypadki:

(P.1): $nx - k = \varepsilon_1 > 0$. Wtedy $u(nx) = \varepsilon_1$. Innymi słowy, po nawinięciu na okrąg pierwszych n punktów ciągu $x, 2x, 3x, \ldots$ liczba nx wylądowała w odległości $\varepsilon_1 \le \varepsilon$ za zerem. Gdy nawiniemy dalsze n punktów, to liczba $2nx$ wyląduje w odległości $2\varepsilon_1$ za zerem itd. W ten sposób na okręgu pojawi się seria punktów, z których każdy odległy jest od poprzedniego o mniej niż ε (rys. 3). Jasne jest więc, że któryś z tych punktów wpadnie w przedział $\alpha < \beta$, który jest długości ε. A tego, że wpadnie, właśnie mieliśmy dowieść.



Rys. 3

(P.2): $-\varepsilon < nx - k < 0$. Ten przypadek pozostawimy inwencji Czytelnika, który oprócz ruchu zgodnego z ruchem wskazówek zegara zna też ruch w przeciwną stronę.

Dowód lematu. Zauważmy, że wystarczy udowodnić ten lemat dla liczb rzeczywistych x z przedziału $\langle 0,1)$.

Oczywiście $Q = [1/\varepsilon] + 1$.

Niech Q będzie najmniejszą liczbą naturalną większą od $1/\varepsilon$. Wtedy $\varepsilon \geq 1/Q$. Podzielmy odcinek $\langle 0, 1)$ na Q (parami rozłącznych) przedziałów:

$$\langle 0, 1/Q), \quad \langle 1/Q, 2/Q), \ldots, \langle (Q-2)/Q, (Q-1)/Q), \quad \langle (Q-1)/Q, 1).$$

Następnie weźmy $Q + 1$ liczb

$$0, \quad u(x), \quad u(2x), \ \ldots, \ u\big((Q-1)x\big), \quad u(Qx),$$

Zasada szufladkowa Dirichleta: Jeśli z n zbiorów wybieramy $n + 1$ elementów, to co najmniej dwa należą do tego samego zbioru.

leżących w przedziale $\langle 0, 1)$. Wtedy z zasady szufladkowej Dirichleta co najmniej dwie liczby $u(b_1 x)$ i $u(b_2 x)$, gdzie $0 \leq b_1 < b_2 \leq Q$, należą do jednego z przedziałów (może się zdarzyć – jeśli x jest liczbą wymierną – że te liczby są równe, tzn. $u(b_1 x) = u(b_2 x)$ – ale to oczywiście w niczym nie przeszkadza). Ponieważ długość każdego z tych przedziałów wynosi $1/Q$, więc

$$\big|u(b_2 x) - u(b_1 x)\big| < 1/Q.$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych liczb α i β, $u(\alpha - \beta) = u(\alpha) - u(\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(\alpha) - u(\beta) \geq 0$, oraz $u(\alpha - \beta) = 1 - (u(\alpha) - u(\beta))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(\alpha) - u(\beta) < 0$.

Niech $b = b_2 - b_1$, oczywiście $0 < b \leq Q$. Jeśli $u(b_2 x) - u(b_1 x) \geq 0$, to $u(bx) = u(b_2 x) - u(b_1 x)$; oraz jeśli ta różnica jest mniejsza od zera, to $u(bx) = 1 - \big(u(b_2 x) - u(b_1 x)\big)$. Zatem z powyższej równości wynika, że

$$0 \leq u(bx) < 1/Q \quad \text{lub} \quad 1 - 1/Q < u(bx) \leq 1 \quad (\text{tzn.} \ \ 1/Q > 1 - u(bx) \geq 0).$$

W pierwszym przypadku bierzemy $a = [bx]$, ponieważ wtedy $|bx - a| = bx - [bx] = u(bx) < 1/Q < \varepsilon$. W drugim, $\big|bx - ([bx] + 1)\big| = \big|bx - [bx] - 1\big| = 1 - \big(bx - [bx]\big) < 1/Q < \varepsilon$. Zatem wystarczy wziąć $a = [bx] + 1$. ■

To jest dokładnie to, co zrobił Kronecker w swojej pracy z 1884 roku.

Można się zastanawiać nad wielowymiarową wersją twierdzenia 1. Na przykład, dla jakich liczb x_1, x_2, punkty $\big(u(x_1), u(x_2)\big)$, $\big(u(2x_1), u(2x_2)\big)$, $\big(u(3x_1), u(3x_2)\big), \ldots$ są gęste w kwadracie jednostkowym. Oczywiście, x_1, x_2 muszą być niewymierne, ale to nie wystarczy, np. dla $x_1 = x_2$, punkty $\big(u(nx_1), u(nx_2)\big)$ leżą tylko na przekątnej (i są tam gęste). Potrzebny jest dodatkowy warunek: tzw. liniowa niezależność x_1, x_2 nad zbiorem liczb wymiernych, tzn. nieistnienie takich niezerowych liczb wymiernych q_1 i q_2, że $q_1 x_1 + q_2 x_2 = 0$. Dowód wielowymiarowej wersji jest bardziej skomplikowany. Możemy natomiast łatwo uogólnić lemat i jego dowód na przypadek wielu liczb.

Ten rezultat jest znacznie silniejszy od lematu – znajdujemy jedną liczbę b wspólną dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$. Korzystając z lematu, możemy tylko dla x_i dobrać b_i, oczywiście $b_1, \ldots, b_n$ są na ogół różnymi liczbami.

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi, ε dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wtedy istnieje liczba naturalna b i liczby całkowite $a_1, \ldots, a_n$, takie, że

$$|bx_i - a_i| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dowód przeprowadzimy dla $n = 2$, ponieważ ten przypadek można łatwo narysować na płaszczyźnie. Po pierwsze, podobnie jak w dowodzie lematu, możemy założyć, że $0 \leq x_1, x_2 < 1$. Po drugie, niech liczba naturalna Q będzie zdefiniowana jak poprzednio. Ponieważ $n = 2$, więc weźmy kwadrat jednostkowy $K = \langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$ i podzielmy go na Q^2 małych kwadracików o boku Q, tzn. na kwadraty postaci $\big\langle i/Q, (i + 1/Q)\big) \times \big\langle j/Q, (j+1)/Q\big)$, gdzie $i, j = 0, 1, \ldots, Q - 1$. Następnie weźmy punkty $(0, 0)$, $(u(x_1), u(x_2))$, $\ldots$, $(u(Q^2 x_1), u(Q^2 x_2))$ należące do K. Ponieważ tych punktów jest $Q^2 + 1$, więc dwa z nich muszą należeć do tego samego „małego kwadracika". Długość boku każdego takiego kwadracika jest równa $1/Q$, zatem istnieją takie liczby całkowite $0 \leq b_1 < b_2 \leq Q^2$, że $\big|u(b_1 x_1) - u(b_2 x_1)\big| < 1/Q$ i $\big|u(b_1 x_2) - u(b_2 x_2)\big| < 1/Q$. Teraz, tak samo jak w dowodzie lematu, wykazujemy, że dla $b = b_2 - b_1$, $0 \leq u(bx_i) < 1/Q$ lub $1/Q > 1 - u(bx_i) \geq 0$, gdzie $i = 1$ lub 2. A następnie dobieramy a_1 dla x_1 i a_2 dla x_2.

Dla $n = 3$ bierzemy sześcian jednostkowy $\langle 0, 1)^3$ i dzielimy na Q^3 „małych sześcianów" o boku $1/Q$ rozpiętych na siatce punktów postaci $(i_1/Q, i_2/Q, i_3/Q)$, gdzie $i_1, i_2, i_3 = 0, \ldots, Q - 1$. Dla $n \geq 4$ postępujemy analogicznie. Chociaż n-wymiarowej kostki nie można sobie „wyobrazić" (w każdym razie trudno), to można ją interpretować jako zbiór takich n-elementowych ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$, że $0 \leq x_k < 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Analogicznie „małe kostki" to zbiory takich ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$, że $i_k/Q \leq x_k < (i_k + 1)/Q$; dla różnych ciągów liczb $i_1, \ldots, i_n$ mamy różne „małe kostki".

Rozwiązanie zadania F 550.
Gdy fotografowany jest skrawek tarczy Słońca zbliżający się do Ziemi, obserwowana częstotliwość ν' różni się od emitowanej ν zgodnie ze wzorem

$$\nu' = \frac{\nu c}{c - v},$$

gdzie v jest prędkością liniową źródła względem obserwatora. Natomiast gdy źródło oddala się, obserwujemy światło o częstotliwości ν'':

$$\nu'' = \frac{\nu c}{c + v}.$$

Z powyższych dwóch równań oraz z tego, że $v = \dfrac{c}{\lambda}$, otrzymujemy, że

$$\Delta\lambda = \frac{2v\lambda}{c} \quad \text{i stąd} \quad v = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$