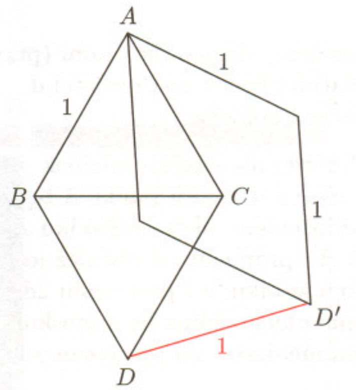
O kolorowaniu płaszczyzny

Renata OLMA, Jacek DYMEL

W 1950 roku 18-letni student Uniwersytetu w Chicago, Edward Nelson, postawił problem: jaka jest minimalna liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania płaszczyzny w ten sposób, by żadne dwa punkty płaszczyzny oddalone o 1 nie były tego samego koloru? Liczbę tę nazywamy liczbą chromatyczną płaszczyzny. Mimo że od postawienia problemu minęło pięćdziesiąt lat, wiadomo jedynie, że liczba chromatyczna płaszczyzny jest większa od 3 i mniejsza od 8. Teraz właśnie to wykażemy.

1. Twierdzenie. Liczba chromatyczna płaszczyzny jest nie mniejsza niż 4.

Dowód. Przypuśćmy, że liczba chromatyczna płaszczyzny może być równa 3. Ponieważ żadne dwa punkty oddalone o 1 nie są tego samego koloru, każdy trójkąt równoboczny o boku 1 ma wierzchołki różnych kolorów. Każdy punkt płaszczyzny pokolorujmy jednym z trzech kolorów: czerwonym, niebieskim lub żółtym. Zaznaczmy na płaszczyźnie cztery punkty A, B, C, D położone tak, jak na rysunku 1.



Rys. 1

Trójkąty ABC i BCD są trójkątami równobocznymi o boku 1. Załóżmy, że punkt A jest pomalowany na czerwono. By każde dwa punkty odległe o 1 były różnych kolorów, punkty B i C muszą być innych kolorów niż punkt A. Możemy przyjąć, że punkt B jest niebieski, a punkt C żółty. Punkt D zatem został na pewno pomalowany na czerwono. Obróćmy teraz romb $ABCD$ dookoła punktu A o taki kąt, aby obrazem punktu D był punkt D', który jest oddalony od punktu D o 1. Punkt D' musi być pomalowany na czerwono (co wynika z rozumowania analogicznego jak dla punktu D), więc znaleźliśmy dwa punkty odległe o 1, które są tego samego koloru. Nie można zatem pomalować płaszczyzny trzema kolorami tak, aby żadne dwa punkty oddalone o 1 nie były tego samego koloru. ■

2. Twierdzenie. Liczba chromatyczna płaszczyzny jest równa co najwyżej 7.

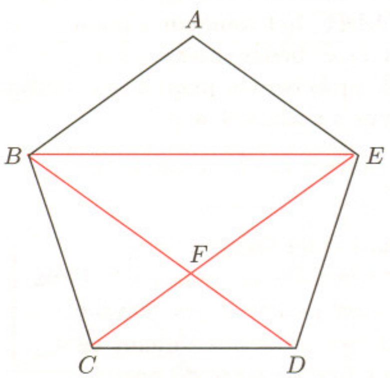
Dowód. Całą płaszczyznę podzielmy na kwadraty według schematu przedstawionego na rysunku 2. Każdy kwadrat ma przekątną długości 1.

Rys. 2

Każdy kwadrat został pomalowany jednym z siedmiu kolorów oznaczonych cyframi od 1 do 7. Górna i prawa krawędź kwadratu jest pomalowana w kolorze kwadratu z wyjątkiem górnego lewego i dolnego prawego rogu. Bez większego trudu można zauważyć, że nie ma na tej płaszczyźnie dwóch punktów oddalonych o 1 i pomalowanych tym samym kolorem. ■

Te dwa rezultaty przedstawione powyżej wyznaczają całą dotychczasową wiedzę na temat liczby chromatycznej płaszczyzny. Mimo badań prowadzonych od pięćdziesięciu lat wiadomo jedynie, że liczba chromatyczna płaszczyzny nie jest większa niż 7 i nie jest mniejsza niż 4. Problemem otwartym nadal pozostaje wyznaczenie liczby chromatycznej płaszczyzny. A może właśnie Ty, Czytelniku, po zastanowieniu znajdziesz rozwiązanie tego problemu?

Mimo iż nie udało się uzyskać rozwiązania w przypadku ogólnym, istnieją liczne wyniki przy dodatkowych założeniach. Teraz przedstawimy przykład jednego z nich.



Rys. 3

3. Twierdzenie. Płaszczyzna pokolorowana czterema kolorami zawiera dwa punkty o tym samym kolorze w odległości 1 lub $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (stosunek złotego podziału).

Dowód. Narysujmy na czterokolorowej płaszczyźnie pięciokąt foremny o boku długości 1 (rys. 3).

Oznaczmy przez x długość przekątnej. Wykażemy, że $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Odcinek BF ma długość 1 (bo czworokąt $ABFE$ jest rombem), a trójkąty BEF i DFC są

Koło Matematyków Studentów UJ
im. Prof. Stanisława Zaremby

organizuje

Czwarte Ogólnopolskie Warsztaty dla Młodych Matematyków

w dniach 20–27 września 2001 roku.

Tym razem są one

poświęcone

ANALIZIE ZESPOLONEJ

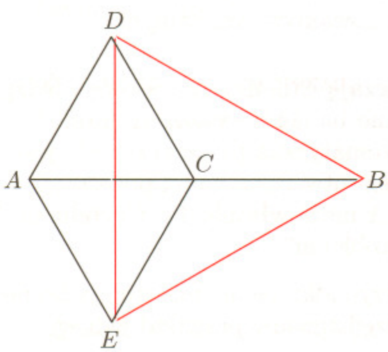
Warsztaty odbywają się pod opieką Katedry Analizy Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, reprezentowanej przez
prof. dr. hab. Józefa Siciaka,
prof. dr. hab. Marka Jarnickiego
i dr. hab. Włodzimierza Zwonka.

Tematyka warsztatów będzie obejmować m.in.:
- przedłużanie funkcji analitycznych,
- zagadnienia ekstremalne w analizie wielu zmiennych,
- teorię pluripotencjału,
- metryki holomorficzne niezmiennicze.

Wszelkie dodatkowe informacje można uzyskać na stronie Koła pod adresem

`http://omega.im.uj.edu.pl`

Zgłoszenia uczestnictwa prosimy nadsyłać do końca czerwca 2001 roku.



Rys. 4

jednokładne, więc

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{CD}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}.$$

Jedynym dodatnim rozwiązaniem równania $x(x-1) = 1$ jest $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pozostaje zauważyć, że dwa spośród pięciu wierzchołków pięciokąta są tego samego koloru. Te dwa wierzchołki albo leżą na jednym boku i ich odległość jest równa 1, albo na jednej przekątnej i ich odległość jest równa $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. ∎

Trójkąty monochromatyczne

Pod pojęciem trójkąta monochromatycznego rozumieć będziemy trójkąt, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru. Przedstawimy kilka problemów związanych z trójkątami monochromatycznymi.

4. Lemat. Wykazać, że jeżeli płaszczyznę pokolorujemy dwoma kolorami (przy wykorzystaniu obu kolorów), to dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej d można znaleźć odcinek o długości d i końcach różnych kolorów.

Dowód. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie dwukolorowej nie istnieje odcinek o różnokolorowych końcach, którego długość jest równa d. Niech punkt A będzie pomalowany na niebiesko. Zgodnie z przyjętym założeniem, okrąg o środku A i promieniu d jest niebieski. Zatem koło o środku A i promieniu d również jest całe niebieskie. Stąd łatwo wywnioskować, iż koło o środku A i promieniu $2d$ jest pokolorowane na niebiesko. Postępując analogicznie, dochodzimy do wniosku, że cała płaszczyzna została pokolorowana tylko na niebiesko, co jest sprzeczne z założeniami. ∎

W 1998 roku na egzaminie wstępnym na informatykę na UJ pojawiło się następujące

5. Zadanie. Płaszczyznę kolorujemy dwoma kolorami. Czy każda liczba rzeczywista dodatnia jest odległością między dwoma punktami o tym samym kolorze?

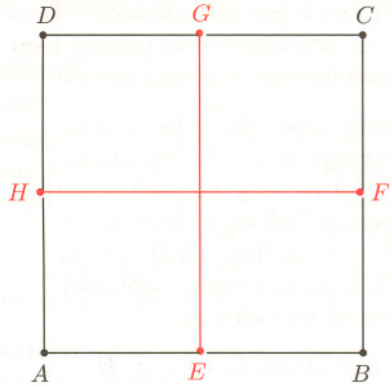
Rozwiązanie. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości d. Pewne dwa wierzchołki muszą być tego samego koloru. Tak więc dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej d znajdziemy dwa punkty tego samego koloru odległe o d. ∎

6. Zadanie (z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych w roku 1989). Punkty płaszczyzny pokolorowane są dwoma kolorami. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

Rozwiązanie. Jeżeli wszystkie punkty płaszczyzny pomalujemy na jeden kolor, to poszukiwany trójkąt istnieje. Przyjmijmy, że punkty płaszczyzny pokolorowane zostały na niebiesko i czerwono. Na płaszczyźnie wybieramy czerwony punkt A i niebieski punkt B w ten sposób, aby odcinek AB miał długość 2 (na podstawie lematu wiemy, że odcinek taki istnieje). Możemy założyć, że punkt C, który jest środkiem odcinka AB, ma kolor np. czerwony. Wybieramy punkty D i E tak, aby czworokąt $DAEC$ był rombem o boku długości 1. Jeżeli przynajmniej jeden z punktów D, E będzie czerwony, to otrzymamy czerwony trójkąt ACD lub ACE. W przeciwnym przypadku trójkąt DEB będzie niebieskim trójkątem równobocznym o boku $\sqrt{3}$. ∎

7. Wniosek. Każda dwukolorowa płaszczyzna zawiera monochromatyczny trójkąt równoboczny o boku 1 lub $\sqrt{3}$. ∎

W związku z wnioskiem rodzi się pytanie: czy na każdej dwukolorowej płaszczyźnie istnieje monochromatyczny trójkąt równoboczny o boku 1? Otóż odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Wystarczy podzielić płaszczyznę na równoległe, pionowe pasy (każdy o szerokości $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Potem malujemy te pasy dwoma kolorami na zmianę, przy czym lewy brzeg należy do pasa, a prawy – nie. Łatwo zauważyć, że tak pokolorowana płaszczyzna nie zawiera równobocznego trójkąta monochromatycznego o boku 1.



Rys. 5

8. Zadanie (z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych w roku 1992). Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, których trzy wierzchołki leżą na brzegu kwadratu. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie kwadratu, że żaden z rozważanych trójkątów nie ma wszystkich wierzchołków w jednym kolorze.

Rozwiązanie. Najpierw wykażemy, że dwa kolory: niebieski i czerwony nie wystarczą do pokolorowania kwadratu. Oznaczmy wierzchołki kwadratu $ABCD$. Punkty E, F, G, H są, odpowiednio, środkami boków AB, BC, CD, DA. Spośród punktów A, B, E przynajmniej dwa są tego samego koloru, powiedzmy – niebieskiego.

Przypuśćmy, że A i B są niebieskie. Wówczas punkty: H, D, C, F nie mogą być niebieskie. Ale wtedy powstaje trójkąt prostokątny HDC, którego wierzchołki są czerwone. Tak więc pojawił się niedozwolony trójkąt. Przypuśćmy teraz, że na niebiesko są pomalowane punkty A i E. Punkty D, G, H są więc czerwone, czyli tworzą monochromatyczny trójkąt prostokątny GDH. Zatem dwa kolory nie wystarczą, ale trzy – tak. Pomalujmy odcinek AB bez końców kolorem czerwonym. Bok AD bez końca D oraz bok DC bez końców malujemy na czarno; bok BC bez końca C malujemy na biało. Wierzchołki D i C kolorujemy na czerwono (rys. 6).

Rys. 6

Trójkąt prostokątny o czerwonych wierzchołkach nie istnieje, gdyż punkty A i B nie są czerwone. Trójkąt prostokątny o czarnych wierzchołkach także nie istnieje, ponieważ wszystkie czarne punkty leżą na bokach AD i DC, ale punkt D nie jest czarny. Trójkąta prostokątnego o białych wierzchołkach również nie ma, gdyż wszystkie białe punkty leżą na boku BC. ■

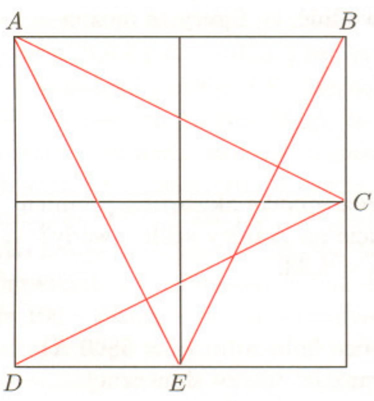
W 1999 roku, w zawodach stopnia pierwszego Olimpiady Matematycznej, pojawiło się następujące

9. Zadanie. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie. Na okręgu wybieramy trzynaście punktów, które tworzą trzynastokąt foremny. Wówczas nasze zadanie jest równoważne zadaniu: udowodnić, że jeżeli każdy wierzchołek trzynastokąta foremnego pomalujemy jednym z trzech kolorów, to pewne trzy punkty utworzą równoramienny trójkąt monochromatyczny. Jeżeli każdy z trzynastu punktów pomalujemy jednym z trzech kolorów, to na pewno znajdziemy co najmniej pięć punktów, które zostały pomalowane tym samym kolorem. Do rozwiązania naszego zadania wystarczy zatem sprawdzić, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków trzynastokąta foremnego znajdziemy takie trzy, które będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Ten krok pozostawiamy Czytelnikowi. ■

Polityka na kolorowo

Na Olimpiadzie Matematycznej w Colorado w 1998 roku pojawiło się zadanie nawiązujące do systemu politycznego Stanów Zjednoczonych Ameryki.

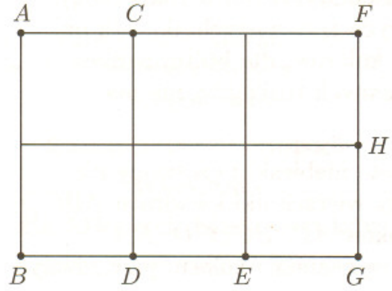


Rys. 7

10. Zadanie. Demokraci i Republikanie wypełnili Plac Lafayette'a o wymiarach 2 na 2. Wykazać, że pewnych dwóch członków tej samej partii znajduje się na Placu w odległości co najmniej $\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Pokolorujmy każdy punkt kwadratu o wymiarach 2 na 2 jednym z kolorów: czerwonym lub niebieskim. Postawmy hipotezę: dowolne dwa punkty tego samego koloru są w odległości mniejszej niż $\sqrt{5}$. Każdy z odcinków DC, CA, AE, EB ma długość $\sqrt{5}$. Przyjmijmy, że punkt D jest pomalowany na czerwono. Odległość DC jest równa $\sqrt{5}$, więc punkt C musi być pomalowany na niebiesko. Rozumując analogicznie, wykazujemy, że punkt A jest czerwony, punkt E – niebieski, a punkt B – czerwony. Znaleźliśmy zatem dwa punkty czerwone: D i B, których odległość jest większa od $\sqrt{5}$ i otrzymaliśmy sprzeczność. ■

A teraz rozszerzmy ten problem.



Rys. 8

11. Zadanie. Prostokątny sztandar o wymiarach 2 na 3 jest pomalowany trzema kolorami. Udowodnić, że znajdziemy na tym sztandarze dwa punkty tego samego koloru na tym sztandarze, których odległość jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Podobnie jak w zadaniu 9, postawmy hipotezę, że każde dwa punkty tego samego koloru leżą w odległości mniejszej niż $\sqrt{5}$. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z trzech kolorów, więc spośród punktów: A, B, F i G (rys. 8) pewne dwa muszą być tego samego koloru. Odległość dwóch punktów tego samego koloru jest mniejsza od $\sqrt{5}$, więc punkty A i B są tego samego koloru lub punkty F i G są tego samego koloru. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż punkty A i B zostały pomalowane na czerwono.

Jeżeli zatem punkty A i B są czerwone, to każdy z punktów C, D, E, F, H musi być pomalowany na niebiesko lub zielono (bo odległość każdego z tych punktów od punktu A lub punktu B jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$). Wykorzystując rozwiązanie zadania 10, możemy stwierdzić, że punkty D i F są tego samego koloru. Tak więc otrzymaliśmy sprzeczność z hipotezą. ■

A teraz Czytelnik może sprawdzić swoje siły i samodzielne rozwiązać następujące

12. Zadanie. Każdy punkt prostokąta o wymiarach 2 na 4 został pomalowany jednym z czterech kolorów. Wykazać, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$.

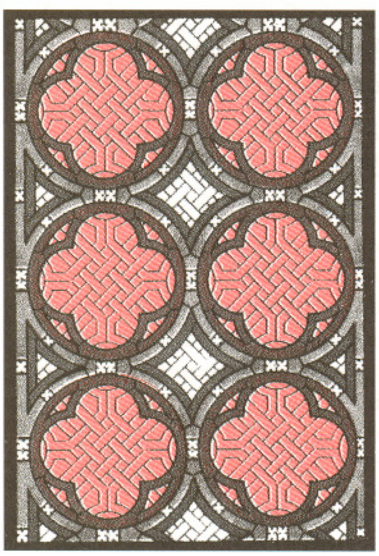
Szampan jest dwukrotnie poddawany procesowi fermentacji. Drugi raz już w butelce, skutkiem czego pojawia się niepożądany osad z drożdży. Zanim jednak szlachetny trunek pójdzie na sprzedaż, osad należy usunąć. Jak to zrobić? Jest to tym trudniejsze, że szampan znajduje się pod ciśnieniem kilku atmosfer. Robi się to tak: butelki ustawia się prawie pionowo (do góry dnem), a następnie co pewien czas lekko potrząsa i obraca. Osad powoli gromadzi się w szyjce butelki. Teraz końcówkę szyjki zamraża się do temperatury $-20°C$. Powstaje korek lodowy, w którym zbiera się cały osad. Następnie butelkę otwiera się i korek zostaje wypchnięty pod ciśnieniem. Oczywiście, należy to robić bardzo ostrożnie, aby nie utracić zbyt wiele cennego wina.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 955. Udowodnić, że maksymalna liczba wież, które można rozstawić na szachownicy $n \times n$ tak, aby każda z nich była bita przez co najwyżej jedną z pozostałych, wynosi $[\frac{4n}{3}]$.
Rozwiązanie na str. 11

M 956. Znaleźć maksymalną liczbę hetmanów, które można rozstawić na szachownicy 8×8 tak, aby każdy z nich był bity przez co najwyżej jednego z pozostałych.
Rozwiązanie na str. 7



M 957. Na szachownicy 100×100 stoi 20 figur (mogą być różne, nawet niekoniecznie „szachowe”). Wiadomo, że każda z figur, stojąc na dowolnym polu szachownicy, bije nie więcej niż 20 pól. Udowodnić, że figury te można przestawić tak, aby wzajemnie się nie biły.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 549. Pod jakim kątem powinien padać na boczną ściankę akwarium promień światła, aby nastąpiło całkowite wewnętrzne odbicie na granicy szkła i wody? Współczynnik załamania szkła $n_1 = 1{,}5$, wody $n_2 = 1{,}33$.
Rozwiązanie na str. 6

F 550. Zauważono, że na fotografiach widma Słońca linia żółta ($\lambda = 5890$ Å) jest przesunięta o 0,08 Å dla lewej oraz prawej krawędzi tarczy słonecznej. Znaleźć prędkość liniową obrotu powierzchni Słońca na równiku.
Rozwiązanie na str. 13