Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

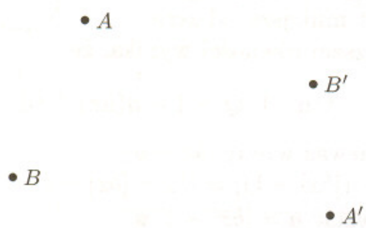
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z fizyki nr 320, 321

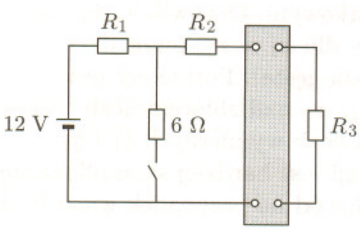
Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

320. Na rysunku 1 dane są cztery punkty A, B, A' i B'. Opisać konstrukcję geometryczną pozwalającą wyznaczyć ogniska cienkiej soczewki, dla której obrazem rzeczywistym punktu A jest A', a obrazem rzeczywistym B jest B'.

321. „Czarna skrzynka” z czterema wyjściami zawiera wyłącznie oporniki. Włączono ją do obwodu przedstawionego na rysunku 2 i okazało się, że przy otwartym kluczu natężenie prądu czerpanego z baterii wynosiło 3 A, a prądu płynącego przez opornik R_3 wynosiło 1,8 A. Jeśli przy zamkniętym kluczu obwód czerpie z baterii prąd o natężeniu 4 A, to ile wynosi wtedy natężenie prądu płynącego przez opornik R_3? Opór jednego z oporników i SEM baterii są podane na rysunku 2.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2001

Przypominamy treść zadań:

312. Równia pochyła o kącie nachylenia α spoczywała na poziomej powierzchni, a na niej położono klocek o masie znacznie większej niż masa równi. Współczynnik tarcia między równią a klockiem wynosi f_1, a między równią a podłożem – f_2. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby równia ruszyła z miejsca? Jeśli ten warunek jest spełniony, to ile wynosi przyspieszenie równi?

313. Fala dźwiękowa biegnie w atmosferze Ziemi (lub innej planety) w górę, przechodząc kolejno przez warstwy coraz bardziej rozrzedzone. Co się stanie z energią tej fali, gdy gęstość będzie znikomo mała (praktycznie rzecz biorąc, będzie to już próżnia)?

312. Aby równia ruszyła z miejsca, przede wszystkim musi ruszyć z miejsca klocek, zatem siła nacisku klocka na równię N (skierowana prostopadle do równi) i siła tarcia T (skierowana równolegle do niej) są związane równaniem

$$T = f_1 N.$$

Pionowa składowa wypadkowej sił N i T jest równa $N\cos\alpha + T\sin\alpha = N(\cos\alpha + f_1\sin\alpha)$, a pozioma składowa jest równa $N\sin\alpha - T\cos\alpha = N(\sin\alpha - f_1\cos\alpha)$; widzimy, że równia ruszy, jeśli

$$(1)\qquad N(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) > f_2 N(\cos\alpha + f_1\sin\alpha),$$

czyli

$$(2)\qquad \sin\alpha - f_1\cos\alpha > f_2(\cos\alpha + f_1\sin\alpha).$$

Ponieważ masę równi można pominąć, więc po jej ruszeniu z miejsca wypadkowa siła działająca na nią musi być równa zeru. Nierówność (1) musi wtedy przejść w równość, co na pierwszy rzut oka wydaje się sprzeczne z warunkiem (2). Jedynym możliwym rozwiązaniem tej pozornej sprzeczności jest $N = T = 0$, co oznacza, że klocek spada swobodnie. Przyspieszenie równi wynosi wtedy $a = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

313. Podczas rozchodzenia się fali dźwiękowej gaz ulega sprężaniu i rozprężaniu, zatem rośnie i maleje jego temperatura. Zwykle pomija się przepływ ciepła od miejsc ogrzanych do miejsc ochłodzonych (zakłada się, że przemiana jest adiabatyczna) – jeśli jednak następuje szybki przepływ ciepła, to wynikające stąd rozproszenie energii będzie prowadzić do tłumienia fali i ogrzewania gazu. Tak się dzieje w gazie rozrzedzonym, gdyż duża jest wtedy średnia długość swobodnej drogi cząsteczek między zderzeniami i przelatują one od miejsca cieplejszego do chłodniejszego bez zwłoki wynikającej ze zderzeń. Omawiany mechanizm tłumienia będzie szczególnie silny wtedy, gdy średnia droga swobodna zbliży się do długości fali (dla fali o częstotliwości 1 kHz w powietrzu o normalnej temperaturze nastąpi to przy ciśnieniu rzędu 0,1 Pa).

Inne zjawisko wynika stąd, że jeśli energia fali miałaby być zachowana, to w miarę spadku ciśnienia (i gęstości) musiałaby rosnąć amplituda drgań, co powodowałoby coraz bardziej stromy przebieg narastania ciśnienia, a w końcu – falę uderzeniową. Powstające przy tym turbulencje (wiry) także prowadziłyby do rozproszenia energii.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 310 (WT=1,53) i 311 (WT=3,73) z numeru 1/2001

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	44,67
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,32
Aleksander Surma	– Myszków	37,39
Tomasz Rudny	– Warszawa	28,28
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	20,48
Tomasz Wietecha	– Tarnów	20,37
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	15,76

Po raz pierwszy w historii **Klubu 44 F** zaliczona została czwarta tura naszego konkursu. Gratulacje dla Nadklubowicza IV Rangi – Andrzeja Idzika, wraz z serdecznymi życzeniami jeszcze wielu rozwiązanych zadań!

Zadania z matematyki nr 423, 424

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2001

423. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi przecinające się w punktach A i B. Dowieść, że istnieją cztery punkty Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 o następującej własności: jeżeli ω jest dowolnym okręgiem stycznym do obu danych okręgów (punkty styczności: P i Q) oraz przecinającym prostą AB (punkty przecięcia: X i Y), to każda z prostych PX, PY, QX, QY przechodzi przez jeden z punktów Z_i.

424. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunki: $f(2) = 2$ oraz

$$f(xy) = x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 - xy \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 424 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2001

Przypominamy treść zadań:

415. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, dla których układ równań

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \qquad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y, z.

416. W kartezjańskim układzie współrzędnych przestrzeni trójwymiarowej rozważamy zbiór X wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Dwa punkty zbioru X będziemy nazywać *stowarzyszonymi*, gdy sumy ich współrzędnych są równe, a ich odległość wynosi $\sqrt{2}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon X \to \mathbb{R}$ spełniające warunki:

- jeśli punkt $P \in X$ ma co najmniej jedną współrzędną równą zeru, to $f(P) = 0$;
- jeśli punkt $P \in X$ ma wszystkie współrzędne dodatnie, to

$$f(P) = 1 + \frac{1}{6}\big(f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4) + f(P_5) + f(P_6)\big),$$

gdzie $P_1, \ldots, P_6$ są sześcioma punktami stowarzyszonymi z P.

415. Niech a, b, c będzie trójką liczb dodatnich, dla której podany układ równań ma rozwiązanie x, y, z. Liczby x, y, z są różne od zera. Mnożymy kolejne równania układu odpowiednio przez x, y oraz z, otrzymując zależności

$$(1) \qquad a = v + w, \qquad b = w + u, \qquad c = u + v,$$

gdzie

$$(2) \qquad u = yz/x, \qquad v = zx/y, \qquad w = xy/z.$$

Zauważmy, że liczby u, v, w mają jednakowy znak. Ze związków (1) wynika, że są to liczby dodatnie. Zatem $b + c - a = 2u > 0$, czyli

$$(3) \qquad b + c > a; \qquad \text{podobnie} \qquad c + a > b, \qquad a + b > c.$$

Na odwrót, jeśli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności (3), to układ równań (1) ma rozwiązanie w liczbach dodatnich u, v, w. Liczby $x = \sqrt{vw}$, $y = \sqrt{wu}$, $z = \sqrt{uv}$ spełniają wówczas związki (2), a więc także i rozważany w zadaniu układ równań.

Tak więc warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rozwiązania owego układu równań jest, by liczby a, b, c były długościami boków pewnego trójkąta.

416. Wykażemy, że istnieje co najwyżej jedna funkcja spełniająca podane warunki. Przypuśćmy, że f_1, f_2 są dwiema takimi funkcjami. Ich różnica $h = f_1 - f_2$ spełnia równanie jednorodne

$$(4) \qquad h(P) = \frac{1}{6}\big(h(P_1) + \ldots + h(P_6)\big) \qquad \text{dla} \quad P = (x, y, z), \quad xyz > 0,$$

z warunkiem brzegowym $h(x, y, z) = 0$ gdy $xyz = 0$. Ustalmy liczbę naturalną $n > 1$ i weźmy pod uwagę zbiór X_n złożony z tych punktów $(x, y, z) \in X$, których suma współrzędnych jest równa n. Jest to zbiór skończony, więc wśród wartości przyjmowanych na nim przez funkcję h istnieje liczba największa i liczba najmniejsza. Jeśli którakolwiek z tych wartości ekstremalnych jest przyjmowana w punkcie P o współrzędnych dodatnich, to wobec warunku (4) ta sama wartość jest też przyjmowana we wszystkich sześciu punktach stowarzyszonych z P. Powtarzając rozumowanie, jesteśmy w stanie dotrzeć do punktów „brzegowych” zbioru X_n, tzn. punktów z co najmniej jedną współrzędną zerową. Wartość funkcji h w takim punkcie jest równa zeru. Stąd wniosek, że h jest funkcją tożsamościowo równą zeru, czyli $f_1 = f_2$; mamy jednoznaczność.

Z drugiej strony, nietrudno się przekonać, że funkcja

$$(5) \qquad f(x, y, z) = \frac{3xyz}{x + y + z} \qquad \text{dla} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \qquad f(0, 0, 0) = 0,$$

spełnia zadane równanie; jeśli bowiem $P = (x, y, z) \in X$, $xyz > 0$, to sześcioma punktami P_i stowarzyszonymi z P są: $(x{+}1, y{-}1, z)$, $(x{-}1, y{+}1, z)$, itd.; sprawdzenie, że wartość $f(P)$ wyraża się przez $f(P_1)$, …, $f(P_6)$ tak, jak wymaga warunek zadania, to kwestia prostego rachunku. Zatem funkcja f dana wzorem (5) jest jedyną funkcją spełniającą postulowane warunki.

(To już całe rozwiązanie; ale jak wpaść na wzór (5)? Na przykład obliczając wartości f w punktach zbiorów X_n, kolejno dla $n = 3$, 4, 5, 6, 7 – dla ustalonego n problem sprowadza się do układu równań liniowych; sporządzenie tabelki wartości w punktach o sumie współrzędnych nie większej niż 7 pozwala odgadnąć wzór (5).)

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 407 (WT=1,33) i 408 (WT=2,30) z numeru 10/2000

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	44,13
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	43,08
Paweł Kubit	– Kraków	41,03
Piotr Kumor	– Olsztyn	38,31
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	34,87

Pan Bartłomiej Dyda kończy drugą czterdziestoczteropunktową rundę.