Γ-limatias

$n \to \infty$

DLACZEGO? (II/1)

Przyjrzyjmy się ciągowi (a_n) określonemu następująco:

$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_0^{97} + a_1^{97} + a_2^{97} + \ldots + a_n^{97}}{n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wtedy $a_2 = 2$, $a_3 = 2^{96} + 1$. Wybrane wyrazy ciągu przedstawione są w tabeli, przy czym $C(k)$ oznacza liczbę cyfr liczby k. Co ciekawego możemy zaobserwować?

Po pierwsze, ciąg (a_n) bardzo szybko rośnie. Wyraz a_8 ma prawie ćwierć biliona cyfr, jeśli więc, Drogi Czytelniku, Twój komputer nie ma dysku o pojemności co najmniej 250 GB, to na pewno nie masz na nim zapisanego rozwinięcia dziesiętnego liczby a_8. Z kolei liczba cyfr wyrazu a_{50} jest większa od 10^{94} i może być porównywana tylko z liczbą cząstek we Wszechświecie. A ile cyfr ma a_{2000}? Mógłbym na to pytanie precyzyjnie odpowiedzieć, ale odpowiedź wypełniłaby całą stronę Γ-limatiasu.

Po drugie, zauważamy, że począwszy od a_3 wszystkie wyrazy w tabeli (a także pośrednie, pominięte) mają cyfrę jedności 7. Począwszy od a_5 końcówki dwucyfrowe powtarzają się cyklicznie: 57, 97, 37, 77, 17. Natomiast od a_{20} końcówki trzycyfrowe powtarzają się z okresem 25: 857, 297, 337, 977, 217, 57, 97, 737, 977, 817, 257, 897, 137, 977, 417, 457, 697, 537, 977, 17, 657, 497, 937, 977, 617, a czterocyfrowe z okresem 125.

DLACZEGO zajmuję się tym ciągiem, **DLACZEGO?**

DLACZEGO tabela urywa się akurat na a_{2039}?

DLACZEGO tak bardzo zwracam uwagę na regularność końcówek wyrazów ciągu (a_n)?

JWR

n	a_n	$C(a_n)$	$C(C(a_n))$
3	79228...50337	29	2
4	51784...37697	2803	4
5	47334...12257	271863	6
6	62181...32097	26370679	8
7	16094...81537	2557955843	10
8	15907...60577	248121716694	12
9	44852...93217	24067...19240	14
10	18571...19457	23345...66246	16
11	11945...34497	22645...25791	18
12	28024...11137	21966...01637	20
13	21490...61377	21307...58735	22
14	13021...93217	20667...97230	24
15	94397...38657	20047...31223	26
16	24824...24897	19446...28628	28
17	12549...44737	18862...76857	30
18	21684...22177	18297...55041	32
19	22467...09217	17748...38912	34
20	66322...89857	17215...74400	36
21	25130...07297	16699...16782	38
22	31387...10337	16198...27795	40
23	69710...74977	15712...96065	42
24	27410...37217	15240...18289	44
25	12504...33057	14783...73978	46
26	10415...80097	14340...75778	48
27	19860...88737	13910...50370	50
28	29836...90977	13492...85821	52
29	40063...54817	13087...24585	54
30	10102...52257	12695...84706	56
31	89526...36897	12314...16384	58
32	70432...19137	11945...89242	60
33	53561...06977	11586...56458	62
34	15147...20417	11239...76399	64
35	91265...67457	10901...10622	66
36	40337...57697	10574...30329	68
37	15747...41537	10257...41874	70
38	36345...22977	99498...61699	71
39	60782...94017	96513...84759	73

n	a_n	$C(a_n)$	$C(C(a_n))$
40	27271...98657	93618...21601	75
50	58494...89057	69036...83076	95
60	13454...83457	50909...76736	115
70	40304...41857	37541...07191	135
80	20000...24257	27684...03469	155
90	10426...90657	20414...63151	175
100	25775...01057	15054...23330	195
200	16751...25057	71587...89940	393
300	51463...49057	34041...68489	592
400	29489...73057	16187...37645	791
500	17477...97057	76976...67765	989
600	50314...21057	36604...94424	1188
700	98344...45057	17406...93896	1387
800	16442...69057	82771...43862	1585
900	22220...93057	39359...68016	1784
1000	22536...17057	18716...74695	1983
1100	51033...41057	89001...10685	2181
1200	18647...65057	42322...28594	2380
1300	33818...89057	20125...37697	2579
1400	40688...13057	95701...45638	2777
1500	33759...37057	45508...87761	2976
1600	15820...61057	21640...78573	3175
1700	47212...85057	10290...52241	3374
1800	11146...09057	48934...19435	3572
1900	69833...33057	23269...40076	3771
2000	76780...57057	11065...53175	3970
2030	18110...32257	44372...85045	4029
2031	51540...56897	43041...49290	4031
2032	58989...79137	41749...81099	4033
2033	28635...06977	40497...66578	4035
2034	10257...60417	39282...58011	4037
2035	58141...47457	38103...26968	4039
2036	70211...77697	36960...15870	4041
2037	62064...01537	35852...39372	4043
2038	39518...22977	34776...19061	4045
2039	38019...34017	33733...48875	4047

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl