Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

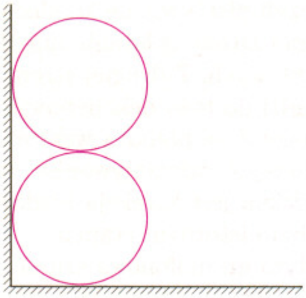
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2001

Zadania z fizyki nr 318, 319

Redaguje Jerzy B. BROJAN

318. Dwa jednakowe walce położono jeden na drugim przy pionowej ścianie (rys. 1) i bardzo lekko pchnięto dolny walec w prawo, tak że zaczął się wysuwać spod górnego, który pozostawał w kontakcie ze ścianą. Jaką prędkość osiągnie ostatecznie dolny walec? Zakładamy, że na żadnej ze stykających się powierzchni nie występuje tarcie.



Rys. 1

319. Ciepło parowania rtęci wynosi $r = 2{,}9\cdot 10^5$ J/kg, napięcie powierzchniowe rtęci – $\sigma = 0{,}49$ J/m^2, gęstość – $\rho = 1{,}36\cdot 10^4$ kg/m^3, a masa atomowa – $M = 201$. Na podstawie tych danych wyprowadzić przybliżoną wartość liczby Avogadra.

Wskazówka: napięciem powierzchniowym cieczy nazywamy energię, którą trzeba dostarczyć, aby zwiększyć powierzchnię cieczy o jednostkę. Dla ścisłości należałoby ustalić ośrodek, z jakim styka się rtęć – przyjmijmy, że jego cząsteczki słabo oddziałują z cząsteczkami rtęci (np. jest to powietrze).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 308 (WT=2,15) i 309 (WT=2,94) z numeru 12/2000

Marek Wójcicki	– Szczecin	45,10
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	43,14
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	36,35
Aleksander Surma	– Myszków	36,02
Tomasz Rudny	– Warszawa	26,91
Tomasz Wietecha	– Tarnów	20,37
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	19,56

Drugą 44-punktową rundę kończy p. Wójcicki.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2001

Przypominamy treść zadań:

310. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α wyrzucono małe ciało z ustaloną wartością prędkości początkowej. Jaki powinien być kąt nachylenia tej prędkości do poziomu, aby: a) rzut trwał maksymalnie długo, b) zasięg rzutu był maksymalny?

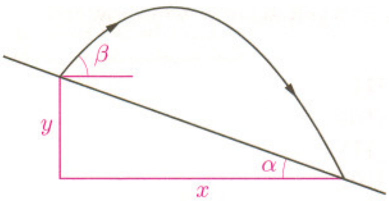
311. Promieniowanie jest pochłaniane w materii zgodnie ze wzorem

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

gdzie I_0 jest natężeniem wiązki padającej, a I – natężeniem wiązki przechodzącej przez warstwę o grubości x. Jeśli parametr μ opisujący pochłanianie promieni podczerwonych ma dla pewnego materiału wartość 2 mm^{-1}, a jego współczynnik przewodnictwa cieplnego wynosi 0,2 W/(m·K), to czy słuszne jest przypuszczenie, że w temperaturze pokojowej przewodnictwo cieplne tego materiału wynika głównie z przepływu energii w formie promieniowania podczerwonego? Wystarczy odpowiedź oparta na ocenie orientacyjnej.
Wskazówka: Współczynnikiem przewodnictwa cieplnego λ nazywamy współczynnik we wzorze Fouriera

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

gdzie ΔQ jest ilością ciepła przepływającą w ciągu czasu Δt przez powierzchnię S pod wpływem różnicy temperatur ΔT między punktami odległymi o Δx wzdłuż osi prostopadłej do tej powierzchni.



Rys. 2

310. Oznaczmy przesunięcie poziome ciała przez x, pionowe przez y (ze zwrotem w dół, zob. rys. 2), czas lotu przez t, a szukany kąt nachylenia przez β. Obowiązują równania:

$$x = v_0 t\cos\beta,$$

$$y = -v_0 t\sin\beta + \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2,$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Przekształcając je, znajdujemy

$$t = \frac{2v_0}{\mathrm{g}}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha},$$

$$x = \frac{2v_0^2}{\mathrm{g}}\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}\frac{\sin(\alpha+2\beta)+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Zatem warunek a) będzie spełniony, gdy $\alpha+\beta = 90^\circ$, a warunek b) – gdy $\alpha + 2\beta = 90^\circ$.

311. Oprzemy się na analizie wymiarowej. Jeśli przewodnictwo cieplne wynika z emisji i absorpcji promieni podczerwonych, to współczynnik λ zależy od stałej absorpcji μ, temperatury T i stałej Stefana–Boltzmanna σ (załóżmy dla uproszczenia, że dany materiał ma właściwości ciała doskonale czarnego). Wymiarem współczynnika przewodnictwa cieplnego λ jest W/(m·K), stałej μ – m^{-1}, a stałej σ – W/(m^2·K^4), a stąd

$$\lambda = \mathrm{const}\cdot\frac{\sigma}{\mu}T^3,$$

gdzie const jest stałą liczbową „rzędu 1". Obliczamy $\sigma T^3/\mu = 0{,}0008$ W/(m·K), co jest wielkością o wiele mniejszą od λ. Wysunięte przypuszczenie należy więc odrzucić.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2001

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 405 (WT=3,26) i 406 (WT=1,43) z numeru 9/2000

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	42,80
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	41,75
Paweł Kubit	– Kraków	39,70
Piotr Kumor	– Olsztyn	36,98
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	34,87

Zadania z matematyki nr 421, 422

Redaguje Marcin E. KUCZMA

421. Niech A będzie zbiorem n-elementowym ($n > 3$). Ile jest funkcji $f\colon A \to A$ o tej własności, że $(n-2)$-krotna iterata $f^{n-2} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-2}$ jest odwzorowaniem stałym, podczas gdy f^{n-3} nie jest odwzorowaniem stałym?

422. Rozważamy ciąg liczb $a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin 2^{-n}k\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy $\lim_{n\to\infty} a_n^{2^{-n}}$.

Zadanie **422** zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2001

Przypominamy treść zadań:

413. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunki $b > 2a$, $c > 2b$. Dowieść, że dla pewnej liczby dodatniej λ część ułamkowa każdego z iloczynów λa, λb, λc jest liczbą z przedziału $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. (Część ułamkowa liczby x to różnica $x - [x]$, gdzie $[x]$ jest jej częścią całkowitą.)

414. Wewnątrz wielokąta wypukłego W znajduje się taki punkt O, że każda prosta przechodząca przez O dzieli wielokąt W na dwie części o równych polach. Czy stąd wynika, że punkt O jest środkiem symetrii wielokąta W?

413. Określamy trzy ciągi przedziałów otwartych

$$I_k = \left(\frac{k+\frac{1}{3}}{a}\,;\ \frac{k+\frac{2}{3}}{a}\right),\qquad J_m = \left(\frac{m+\frac{1}{3}}{b}\,;\ \frac{m+\frac{2}{3}}{b}\right),\qquad K_n = \left(\frac{n+\frac{1}{3}}{c}\,;\ \frac{n+\frac{2}{3}}{c}\right)$$

$(k, m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Należy dowieść, że dla pewnej trójki wskaźników k, m, n część wspólna $I_k \cap J_m \cap K_n$ jest zbiorem niepustym (każda liczba λ należąca do takiego zbioru spełnia wymagany warunek).

Odległość między dowolnymi dwoma sąsiednimi przedziałami K_n, K_{n+1}, równa $\frac{2}{3c}$, jest mniejsza niż długość każdego przedziału J_m, równa $\frac{1}{3b}$. Zatem każdy przedział J_m przecina pewien przedział K_n. Teza będzie wobec tego udowodniona, jeśli wykażemy, że pewien przedział I_k zawiera pewien przedział J_m.

Zadanie zostało sprowadzone do znalezienia pary liczb całkowitych $k, m \ge 0$ spełniającej warunki

$$(*)\qquad \frac{k+\frac{1}{3}}{a} \le \frac{m+\frac{1}{3}}{b} \quad\text{oraz}\quad \frac{m+\frac{2}{3}}{b} \le \frac{k+\frac{2}{3}}{a}.$$

Próbujemy przyjąć $k = 0$. Warunki $(*)$ przybierają postać $\frac{3}{2}m + 1 \le t \le 3m + 1$, gdzie $t = b/a > 2$; równoważnie: $u \le m \le 2u$, gdzie $u = \frac{1}{3}(t-1)$. Gdy $t \ge \frac{5}{2}$, wówczas $u \ge \frac{1}{2}$, przedział $\langle u; 2u\rangle$ zawiera co najmniej jedną liczbę całkowitą m, i mamy to, o co chodzi.

Pozostaje przypadek, gdy $t < \frac{5}{2}$. Wtedy przyjmujemy $m = 2k + 1$. Takie podstawienie sprowadza warunki $(*)$ po prostym przekształceniu do nierówności podwójnej

$$v \le k \le w, \qquad \text{gdzie}\quad v = \frac{5-2t}{3t-6}, \quad w = \frac{4-t}{3t-6}.$$

Gdy $2 < t < \frac{5}{2}$, wówczas $w - v \ge 1$, więc znajdujemy w przedziale $\langle v; w\rangle$ liczbę całkowitą k; dla tej liczby (i dla $m = 2k+1$) warunki $(*)$ są spełnione. To kończy dowód.

414. Odpowiedź: *tak*. Przypuśćmy bowiem, że punkt O nie jest środkiem symetrii wielokąta W. Istnieje wówczas prosta przechodząca przez O i przecinająca brzeg wielokąta w punktach A i A' tak, że $|OA| < |OA'|$. Obracamy ją o niewielki kąt α wokół punktu O; otrzymana prosta przecina brzeg wielokąta w punktach B i B' ($|\angle AOB| = |\angle A'OB'| = \alpha$).

Przy obracaniu prostej punkty jej przecięcia z brzegiem zmieniają swe położenie w sposób ciągły. Jeśli więc kąt α jest dostatecznie mały, to z nierówności $|OA| < |OA'|$ wynika nierówność $|OB| < |OB'|$, a w obszarach kątów wypukłych AOB i $A'OB'$ nie znajduje się żaden wierzchołek wielokąta W; zatem odcinki AB i $A'B'$ są fragmentami brzegu wielokąta.

Skoro każda z prostych AA' i BB' dzieli wielokąt na dwie części o równych polach, to trójkąty AOB i $A'OB'$ muszą mieć równe pola. Ale $S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\alpha$, $S_{A'OB'} = \frac{1}{2}\cdot|OA'|\cdot|OB'|\cdot\sin\alpha$, więc $S_{AOB} < S_{A'OB'}$. Uzyskana sprzeczność uzasadnia odpowiedź.

Rozwiązanie zadania M 952.

Załóżmy, że równość $f(f(n)) = n + 2001$ jest spełniona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy

$$f(n+2001) = f(f(f(n))) = f(n) + 2001,$$

a więc również

$$f(n + 2001k) = f(n) + 2001k,$$

dla wszystkich $n, k \in \mathbb{N}_0$. Rozważmy dowolne $0 \le r \le 2000$ i podzielmy z resztą liczbę $f(r)$ przez 2001: $f(r) = 2001p + q$, $0 \le q \le 2000$. Z założenia

$$f(f(r)) = r + 2001$$

oraz

$$f(f(r)) = f(q + 2001p) = f(q) + 2001p.$$

Ponieważ $r \le 2000$, więc możliwe są dwa przypadki:

1) $p = 0$,
czyli $f(r) = q$ oraz $f(q) = r + 2001$;

2) $p = 1$,
czyli $f(r) = q + 2001$ oraz
$f(q) = f(f(r)) - 2001 = r$.

W obu przypadkach mamy, oczywiście, $f(r) \ne f(q)$, czyli $r \ne q$. Tak więc zbiór $\{0, 1, \ldots, 2000\}$ można podzielić na pary (a, b) tak, że $f(a) = b$ i $f(b) = a + 2001$. Przeczy to jednak temu, że w zbiorze tym jest nieparzysta liczba elementów.