5/01 (41)

Γlimatias $\lim_{n\to\infty}$

DLACZEGO? (4)

W naszych rozważaniach przyjęliśmy milczące (i, niestety, nieprawdziwe) założenie, że wszystkie dopuszczalne (czyli względnie pierwsze z 210) reszty z dzielenia przez 210 występują w rozważanym przez nas ciągu z jednakową częstością. Przeanalizujmy na początek prostszy przykład związany z iteracjami funkcji h, która argument mnoży przez 5, dodaje 1, a następnie usuwa z wyniku wszystkie czynniki 2 i 3.

Ponieważ wartości tak określonej funkcji h są liczbami względnie pierwszymi z 6, zatem mogą przy dzieleniu przez 6 dawać resztę 1 lub 5.

Jeżeli $n \equiv 1 \pmod 6$, to $5n+1$ jest liczbą podzielną przez 6 i po kompletnym wydzieleniu przez 2 i 3 da z równym prawdopodobieństwem liczbę podzielną przez 6 z resztą 1 lub 5.

Jeśli jednak $n \equiv 5 \pmod 6$, to $5n+1$ jest liczbą parzystą niepodzielną przez 3 (daje resztę 2 przy dzieleniu przez 6). Po kompletnym wydzieleniu tej liczby przez 2 otrzymamy:
- z prawdopodobieństwem 1/2, po dokładnie jednym dzieleniu przez 2, liczbę postaci $6k+1$,
- z prawdopodobieństwem 1/4, po dokładnie dwóch dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k+5$,
- z prawdopodobieństwem 1/8 po dokładnie trzech dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k+1$,
- z prawdopodobieństwem 1/16 po dokładnie czterech dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k+5$ itd.

Zatem szansa na uzyskanie w tym przypadku liczby postaci $6k+1$ wynosi 2/3, a postaci $6k+5$ tylko 1/3.

Jeśli więc przez C_1 i C_5 oznaczymy oczekiwane częstości występowania w ciągu iteracji funkcji h liczb dających przy dzieleniu przez 6 reszty odpowiednio 1 i 5, to otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{2C_5}{3} \\ C_5 = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_5}{3} \\ C_1 + C_5 = 1 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są liczby $C_1 = 4/7$ i $C_5 = 3/7$. To zaś oznacza, że przy każdej iteracji funkcja h mnoży liczbę przez 5, a następnie dzieli ją przez 2 średnio 2 razy i przez 3 (**UWAGA !!!**) nie $\frac{3}{4}$, ale $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2} = \frac{6}{7}$ raza.

Podobne zjawisko występuje dla funkcji f. Oczekiwane częstości występowania reszt z dzielenia przez 210 w ciągu jej iteracji podane są w tabeli.

Oczywiście, nie są to wartości dokładne, a jedynie przybliżone. Nawet najbardziej wnikliwy Czytelnik patrzący na tę tabelę nie ma szansy zauważenia, że dokładne wartości są liczbami wymiernymi o mianowniku

$$1324621797939996777697147975759531841253 =$$
$$= 3^2 \cdot 37 \cdot 523 \cdot 4951 \cdot 947747 \cdot 162091645248234747893931 1,$$

(niektóre ułamki się trochę upraszczają, ale niewiele).

Widzimy, że reszta 19 powinna pojawiać się prawie dwukrotnie częściej niż 191.

Uwzględnienie powyższych wyników prowadzi do korekty rozważań przedstawionych w poprzednim (kwietniowym, a więc Prima Aprilisowym) Γ-limatiasie.

I tak, należy oczekiwać w każdej iteracji funkcji f
- 0,8128688 dzieleń przez 3 (zamiast $\frac{3}{4} = 0{,}75$),
- 0,2857835 dzieleń przez 5 (zamiast $\frac{5}{16} = 0{,}3125$),
- 0,2039183 dzieleń przez 7 (zamiast $\frac{7}{36} \approx 0{,}1944444$).

Ostatecznie oczekujemy, że funkcja f średnio mnoży liczbę przez 0,99941477, czyli zmniejsza liczbę cyfr o 1 co 3933,36726 iteracji.

Należy oczekiwać, że efekt tendencji zmniejszającej funkcji f będzie zauważalny po liczbie iteracji rzędu kwadratu tej ostatniej liczby. Jest on równy około 15471378, jednak ekscytowanie się jego zgodnością z liczbą iteracji, po której ciąg zszedł do jedynki, byłoby czystym mistycyzmem.

1	0,02614371
11	0,01840448
13	0,01426965
17	0,02112253
19	0,02805647
23	0,01709291
29	0,01974483
31	0,02466955
37	0,02662055
41	0,01965202
43	0,01662163
47	0,01944558

53	0,02195964
59	0,01810492
61	0,02739508
67	0,01831024
71	0,02025111
73	0,01979727
79	0,02649677
83	0,01952313
89	0,01645591
97	0,01981226
101	0,01617247
103	0,01694844

107	0,01939195
109	0,01946275
113	0,02300551
121	0,02509051
127	0,02595694
131	0,01738549
137	0,02167048
139	0,02346179
143	0,02284915
149	0,01847773
151	0,01612545
157	0,02582107

163	0,0180086
167	0,01910048
169	0,02572076
173	0,01953688
179	0,01772802
181	0,02507326
187	0,02678566
191	0,01426742
193	0,01901402
197	0,02210952
199	0,02625015
209	0,01463529

1 (mod 3)	0,5419126
2 (mod 3)	0,4580874
1 (mod 5)	0,2506306
2 (mod 5)	0,2661472
3 (mod 5)	0,2286268
4 (mod 5)	0,2545954
1 (mod 7)	0,179554
2 (mod 7)	0,1654464
3 (mod 7)	0,1747871
4 (mod 7)	0,1526751
5 (mod 7)	0,1720095
6 (mod 7)	0,1555279

Natomiast całkiem na miejscu jest przekonanie, że po kilkudziesięciu milionach iteracji efekt zmniejszania musi wziąć górę nad kapryśnymi wahaniami ciągu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl