A może jednak ukryty determinizm?

Andrzej DRAGAN

Istnieje w mechanice kwantowej przedziwna zasada mówiąca, że w ogólności wynik pojedynczego pomiaru nie jest przez nic określony. Na przykład, zgodnie z tą zasadą chwila, w której wyemitowany zostanie foton ze wzbudzonego atomu, nie może zostać przewidziana przez żadne prawo. Wprowadza to do mechaniki kwantowej element *indeterminizmu* (czyli nieprzewidywalności zjawisk). Nic dziwnego, że tak niecodzienna zasada budzi wiele sprzeciwów. Słyszy się na przykład: „Ja w to nigdy nie uwierzę! Na pewno istnieje *coś*, co wywołuje emisję tego fotonu. Przecież indeterminizm to absurd!". Powstało nawet wiele konkurencyjnych teorii używajacych zamiast słowa „*coś*" terminu *parametr ukryty*. Teorie te mówią: istnieją pewne, na razie nieznane (ukryte), parametry, które *determinują* wyniki pojedynczych pomiarów.

Sytuacja radykalnie się zmieniła, gdy w 1964 roku ukazała się praca Bella zawierająca słynne nierówności (nazwane jego imieniem). Dzięki nim pojawiła się możliwość eksperymentalnego sprawdzenia, czy ukryte parametry istnieją, czy też nie. Co prawda, uzyskane rozstrzygnięcia nie są jeszcze ostateczne, jednak mogą być traktowane jako bardzo poważny argument. Zanim jednak poznamy sens nierówności Bella, dowiedzmy się, jak w ogóle doszło do tego, że twórcy mechaniki kwantowej tak głęboko w nią uwierzyli i bronili jej przed atakami zwolenników sprawdzonych od wieków teorii w pełni deterministycznych?

1. Dirac mówi: tylko prawdopodobieństwa!

Przedstawmy na początek rozumowanie pochodzące od jednego z twórców mechaniki kwantowej, Paula A.M. Diraca. Wyobraźmy sobie strumień światła przechodzący przez dwa liniowe polaryzatory ustawione w różny sposób. Po przejściu przez pierwszy światło zostaje liniowo spolaryzowane. Następnie, podczas przechodzenia przez drugi, natężenie światła zmniejsza się, a płaszczyzna polaryzacji zostaje obrócona. Okazuje się, że stosunek natężenia fali przechodzącej przez drugi polaryzator do natężenia fali na niego padającej równa się zawsze $\cos^2\phi$, gdzie ϕ oznacza kąt między kierunkami ustawienia polaryzatorów. Prawo to jest wyśmienicie wyjaśnione przez klasyczną teorię elektromagnetyzmu. Nie ma więc na razie powodu do niepokoju.

Można to łatwo sprawdzić. Wystarczy kupić dwa tanie zegarki elektroniczne i wymontować z nich ekraniki. Są to ni mniej ni więcej, tylko dwa polaryzatorki. To nie przypadek. Polaryzator jest niezbędnym elementem wyświetlacza ciekłokrystalicznego znajdującego się w zegarku.

Jednakże ubiegły wiek obfitował w doświadczenia dowodzące kwantowej natury światła. Po ludzku mówiąc: strumień światła składa się z „kawałków" zwanych fotonami. Doświadczenia te zmuszają nas do zrewidowania sposobu rozumienia eksperymentu z dwoma polaryzatorami. Teraz bowiem zmuszeni jesteśmy przyjąć, że polaryzator pochłania pewną część *fotonów* spośród wszystkich nań padających. Trudności pojawią się, gdy zadamy pytanie, *które* z fotonów przechodzących przez pierwszy polaryzator przejdą również przez drugi, a które zostaną pochłonięte? Skoro wiadomo, że strumień światła może mieć własność *polaryzacji*, a składa się on z fotonów, to musimy przyznać, że każdy foton niesie informację o polaryzacji (mówiąc w skrócie: poszczególne fotony „mają" jakąś polaryzację). Jeżeli więc użyliśmy światła monochromatycznego, to *wszystkie fotony po przejściu przez pierwszy polaryzator muszą stać się jednakowe*. Nic nie ma prawa *wyróżniać* niektórych fotonów spośród innych. Zatem wydawać by się mogło, że jedynym sensownym wynikiem eksperymentu może być tylko przejście przez drugi polaryzator *wszystkich* fotonów albo ich pochłonięcie. Taka piękna teoria i taki paskudny fakt. Bowiem $\cos^2\phi$ jak był, tak jest. Jednak prawo to oznacza teraz coś innego: spośród N fotonów padających na drugi polaryzator przejdzie przez niego zaledwie $N\cos^2\phi$. Wygląda więc na to, że niektóre fotony przejdą, a niektóre nie. Naturalnie, natychmiast padnie odpowiedź: „No dobrze, najwyraźniej fotony są scharakteryzowane jeszcze jakimiś *ukrytymi parametrami*, które odróżniają jedne od drugich". Jeżeli jednak istniałyby jakieś parametry, to dlaczego nie potrafimy ich kontrolować? Czemu polaryzatory „nie potrafią" odsiać fotonów określonych tymi samymi parametrami? Przecież jeżeli wstawimy w strumień światła kolejne polaryzatory, to prawo „$\cos^2\phi$" będzie działało nadal

Rozwiązanie zadania F 547.
Moc żarowki jest równa sumie energii wszystkich n fotonów wysyłanych w jednostce czasu

$$P = n\lambda\nu = n\frac{hc}{\lambda},$$

skąd otrzymujemy

$$n = \frac{P\lambda}{hc} \approx 1{,}2 \cdot 10^{21} \text{ fotonów.}$$

(a gdybyśmy mieli „odsiane" fotony o identycznych parametrach, to znowu powinny wszystkie przejść albo wszystkie nie przejść).

Jakie rozwiązanie problemu proponuje mechanika kwantowa? Cóż, jest ono bardzo dziwaczne. Teoria ta mówi bowiem: „Proszę państwa! Nic nie wyróżnia żadnego fotonu. Dlatego to, czy określony foton będzie łaskaw przejść, czy nie, nie jest *niczym* zdeterminowane. Nie istnieje żaden *parametr* decydujący o losie pojedynczych fotonów! Nie ma żadnego parametru! Po prostu na elementarnym poziomie *nie istnieje żadne prawo fizyczne, które przewidywałoby wynik pojedynczego eksperymentu*. Znamy wyłącznie prawdopodobieństwo tego, że foton przejdzie przez polaryzator oraz prawdopodobieństwo jego pochłonięcia. Nic więcej."

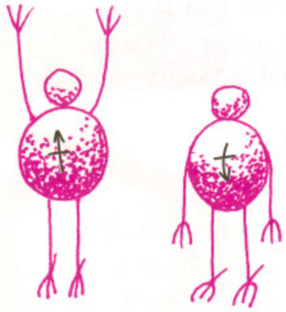
2. Einstein protestuje: proszę państwa, tak być nie może!

Rozważmy proces kreacji pary elektron-pozyton. W przypadku gdy w rozważanym procesie całkowity moment pędu układu znika, składowe spinu powstałych w procesie cząstek wzdłuż dowolnego kierunku muszą być przeciwnie skierowane. Oznacza to, że gdy zmierzymy kierunek spinu jednej z cząstek, wiemy natychmiast, jaki będzie wynik analogicznego pomiaru dokonanego na drugiej. Spin musi być skierowany w przeciwną stronę. Prawo niby proste. Ale jeżeli prawdziwe są kwantowomechaniczne reguły, to przed wpadnięciem do detektorów cząstki „nie wiedziały" jeszcze, jaki będzie wynik. Decyzję musiały „podjąć" (nie bierzmy jednak tej antropomorfizacji dosłownie ;-) dopiero w *chwili pomiaru*. Jednak wówczas cząstki nie zdążyłyby „uzgodnić" pomiędzy sobą wyników, szczególnie gdy wpadły do detektorów jednocześnie (oczywiście, jeżeli nie dopuszczamy ponadświetlnych sygnałów). Z drugiej strony nie może dojść do „wpadki" polegającej na tym, że zmierzone spiny nie są przeciwnie skierowane. Co z tym począć? Einstein wyciągnął wniosek, że kwantowomechaniczne reguły nie mogą być prawdziwe.

Na temat hipotezy ukrytych parametrów powstało wiele prac, ale wciąż brakowało ostatecznego rozstrzygnięcia, aż do momentu pojawienia się pewnego pomysłu dającego nareszcie szansę sprawdzenia, kto ma rację w sporze. Ale po kolei. Najpierw bowiem pojawił się inny eksperyment myślowy, który trochę naszą (i tak niewesołą) sytuację pogmatwał. A został on podany w legendarnej pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena, zyskawszy przydomek „paradoksu EPR" (patrz margines). Einstein był kontent, gdyż udało mu się „podstawić nogę" mechanice kwantowej (od początku za nią nie przepadał). Zgodnie z jego rozumowaniem, „eksperyment EPR" powinien być w gruncie rzeczy podobny do sytuacji, gdy ściągamy z nóg buty i rzucamy je w przeciwnych kierunkach. Nie zdążyliśmy jednak spojrzeć, który but poleciał w którą stronę. Musimy więc to sprawdzić. Podchodzimy do jednego z nich, bierzemy go do ręki i zauważamy: „O! *Tu* jest lewy! W takim razie prawy musi być *tam*!". Oczywiście sam fakt *obserwacji* buta nie może *spowodować*, że nagle „zdecydował się" on być lewy lub prawy! „Skrętność" butów rzuconych w obu kierunkach jest określona już w momencie rzutu. Einstein uważał, że emitowane w przeciwnych kierunkach cząstki (na przykład elektrony) przypominają właśnie parę takich butów. Co więcej, wysnuł on wniosek, że aby uchronić zasadę przyczynowości, zmuszeni jesteśmy porzucić absurdalne reguły mechaniki kwantowej i pozostać przy poczciwych i sprawdzonych prawach deterministycznych, przyjmując hipotezę ukrytych parametrów.

3. Bell robi porządek: sprawdźmy, jak jest naprawdę.

Argumentacja Einsteina wydawała się bardzo przekonująca, aż tu nagle na scenie pojawił się John Bell i raz jeszcze wywrócił wszystko do góry nogami! W jaki sposób? Spróbujmy prześledzić jego rozumowanie na przykładzie elektronów biorących udział w paradoksie EPR. Załóżmy sobie, że istnieją jakieś nieznane nam parametry, które określają wyniki wszystkich eksperymentów. Na przykład: elektron „miał" spin „w górę", bo miał wcześniej ustalony parametr określający taki spin. Podobnie pozyton. Przyjmijmy więc, że cząstki w chwili emisji ustalają między sobą parametry: „ty bierzesz parametr na spin „w górę", ja na „spin w dół" i lecimy!". Bez utraty ogólności możemy założyć, że obie cząstki mają ten sam parametr (nazwijmy go tradycyjnie λ) określający jednocześnie stan obu z nich. A jaka jest natura tych parametrów? „Nie mam pojęcia i nic mnie to nie obchodzi!" – mówi Bell. „Jeżeli te parametry rzeczywiście istnieją, to prędzej czy później zostaną odkryte, a na razie po prostu zakładam, że jakieś dziwne parametry nieznanej natury istnieją i decydują o wynikach wszystkich pomiarów". W eksperymencie myślowym EPR użyliśmy dwóch urządzeń mierzących spin wzdłuż tych samych kierunków. Nic jednak nie zabrania nam zmienić względnej orientacji tych kierunków! Możemy przecież ustawić je w różny sposób i zobaczyć, jak wpłynie to na wyniki. Jeśli chcemy ukrytych parametrów, to musimy założyć, że determinują one wynik *każdego* eksperymentu, jaki przyjdzie nam do głowy wykonać (czyli jakkolwiek byśmy ustawili detektory, wynik musi być zdeterminowany parametrem λ). Wynik każdego eksperymentu może być tylko: „w górę" albo „w dół". Trzeciego



wyjścia być nie może. Możemy sobie powiedzieć: jeśli wyszło „w górę”, to za wynik eksperymentu przyjmiemy $+1$, a jeśli nie, to -1. Potem możemy wykonać sto lub więcej eksperymentów i obliczyć, jaki jest średni wynik. Jeśli wyjdzie zero, to znaczy, że tak samo często spin trafia się „w górę” jak i „w dół”. Średnia może być też dodatnia lub ujemna. Każdy domyśla się, co to będzie oznaczać. Raz spin będzie częściej ustawiony w tę, a raz w drugą stronę. Weźmy więc dwa detektory i jeden ustawmy w położeniu $\mathbf{a}$, a drugi w położeniu $\mathbf{b}$. Następnie sprawdźmy, jakie są wyniki dla obu cząstek. Oznaczmy przez $A_{\mathbf{a}}(\lambda)$ wynik eksperymentu na elektronie, a przez $B_{\mathbf{b}}(\lambda)$ na pozytonie. Jak widać, wyniki (mogące jedynie przyjąć wartości ± 1) zależą tylko od ustawienia detektorów i ukrytego parametru. No dobrze, i co dalej? Powiedzmy sobie: te ukryte parametry, których nie znamy, nie mogą być również przez nas nijak kontrolowane. Więc tak naprawdę przypisywane są one cząstkom losowo (w zasadzie, w naszej teorii musi istnieć jakiś czynnik, który decyduje o tym, jaki parametr zostaje przypisany, ale my go nie potrafimy na razie kontrolować, więc wychodzi na jedno). Oznaczmy zbiór wszystkich możliwych parametrów przez Λ. Możemy jeszcze przyjąć dla ogólności możliwość, że niektóre parametry trafiają się częściej, a inne rzadziej, więc określamy jakiś nieznany rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze wszystkich parametrów $p(\lambda)$. Zatem im większa wartość $p(\lambda)$, tym częściej będzie „trafiał się” parametr λ. Suma wszystkich prawdopodobieństw musi być równa jeden, tzn. $\sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)=1$. Skoro już to wszystko wiemy, to możemy przystąpić do rachunków. Obliczmy najpierw średnią wartość iloczynu wyników otrzymanych dla obu cząstek. Musimy w tym celu znaleźć sumę, do której różne parametry λ wchodzą z różnymi wagami $p(\lambda)$

Wzór obok kamufluje pewne ważne założenie. Mianowicie takie, że wyniki obu pomiarów są niezależne. Innymi słowy, pomiary dokonane na odległych cząstkach nie mają na siebie wpływu (założenie to nazywa się też *postulatem lokalności*). Formalne zastosowanie tego założenia polega na stwierdzeniu, że wynik pomiaru spinów może być zapisany w postaci iloczynu wyników dla elektronu i pozytonu osobno (to wcale nie jest takie oczywiste i po prostu zakładamy, że tak musi być!).

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{\lambda\in\Lambda} A_{\mathbf{a}}(\lambda)B_{\mathbf{b}}(\lambda)\,p(\lambda).$$

Na przykład, jeżeli przyjmiemy rozkład prawdopodobieństwa stały (niezależny od λ), to każdy parametr będzie „równoprawdopodobny” i szukana wartość średnia będzie po prostu zwykłą średnią arytmetyczną możliwych wyników. Skorzystamy teraz z twierdzenia dotyczącego sumy szeregu: $\left|\sum_x f(x)\right| \le \sum_x |f(x)|$. Możemy dokonać serii pomiarów przy pewnych ustawieniach detektorów i obliczyć wartość średnią, następnie powtórzyć procedurę, zmieniając jeden z kierunków, odjąć otrzymane wyniki i wziąć wartość bezwzględną. Otrzymamy wówczas

$$|\,E(\mathbf{a}',\mathbf{b})-E(\mathbf{a}',\mathbf{b}')\,| \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |A_{\mathbf{a}'}(\lambda)B_{\mathbf{b}}(\lambda)-A_{\mathbf{a}'}(\lambda)B_{\mathbf{b}'}(\lambda)|\,p(\lambda),$$

a gdy się uważniej przyjrzeć, to się okaże, że prawa strona może być również zapisana w sprytny sposób:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |A_{\mathbf{a}'}|\,|B_{\mathbf{b}}(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'})-B_{\mathbf{b}'}(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}})|\,p(\lambda).$$

Znak $+$ lub $-$ możemy sobie wybrać na końcu, jaki nam się spodoba. Dla prostoty pominęliśmy w zapisie zależność wyników od parametru λ. Wiemy, że dla każdego λ mamy $|A_{\mathbf{a}'}(\lambda)|=1$. Zatem to ostatnie równa się po prostu

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\in\Lambda} |B_{\mathbf{b}}(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'})-B_{\mathbf{b}'}(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}})|\,p(\lambda)\le\\
&\le \sum_{\lambda\in\Lambda} \Big||B_{\mathbf{b}}|(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'})+|B_{\mathbf{b}'}|(1\pm A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}})\Big|\,p(\lambda)=\\
&=\sum_{\lambda\in\Lambda} |2\pm(A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}'}+A_{\mathbf{a}}B_{\mathbf{b}})|\,p(\lambda)=\\
&=2\pm(E(\mathbf{a},\mathbf{b}')+E(\mathbf{a},\mathbf{b}))\,,
\end{aligned}$$

Wszystkim zapaleńcom polecam sprawdzenie nierówności pojawiającej się powyżej (nie należy całej roboty zwalać na autora artykułu ;-). Wystarczy zauważyć, że suma dwóch liczb dodatnich jest większa niż ich różnica. W wyniku tych wszystkich zawiłych (choć, trzeba przyznać, niezbyt wyrafinowanych) rachunków, dostajemy nierówność

Rozwiązanie zadania F 548.
Załóżmy, że foton o częstotliwości ν został pochłonięty. Wtedy całą energię fotonu oraz jego pęd przejmie elektron, nabywając prędkość v w układzie, w którym spoczywał przed pochłonięciem fotonu. Musi być więc zachowana energia

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2$$

i pęd

$$\frac{h\nu}{c}=mv.$$

Rozwiązaniem powyższych równań jest $v=2c$. Jest to sprzeczne z tym, że prędkość dowolnej cząstki materialnej nie może przekraczać prędkości światła.

$$| E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') | \leq 2 \pm (E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b})),$$

a z tego już łatwo (ćwiczenie numer dwa) otrzymujemy to, co nazywa się szumnie „nierównością Bella" (wystarczy sprytnie dobrać znaki: raz plus, a raz minus w powyższym wyrażeniu)

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') \leq 2,$$

gdzie

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}').$$

Chyba nikt nie spodziewa się, że ten prosty wzorek może tak wiele znaczyć! A tutaj czeka spora niespodzianka. Okazuje się (te rachunki sobie już darujemy), że jeśli „zapytać" mechanikę kwantową, jaka jest wartość funkcji S dla pewnych szczególnych ustawień detektorów, to okaże się, że możemy dostać wynik nawet $S = 2\sqrt{2}$. Każdy widzi, że łamie to powyższą nierówność (taki wynik jest przecież większy niż dwa!). Mamy nareszcie to, na co czekaliśmy: znaleźliśmy możliwość eksperymentalnej weryfikacji przyjętych założeń (determinizmu i lokalności) w naszym prostym modelu. Wystarczy w odpowiedni sposób ustawić polaryzatory, przepuścić przez nie wiele par elektron-pozyton, obliczyć wartości średnie i utworzyć z nich kombinację S. Jeżeli otrzymany wynik przekroczy wartość 2 (zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej), to otrzymamy bezpośredni dowód nieadekwatności przyjętych założeń do badanej sytuacji fizycznej!

I jeszcze jedna uwaga. Przedziwnego, nielokalnego „efektu EPR" nie da się użyć do przesyłania ponadświetlnych sygnałów. Dlaczego? A niby w jaki sposób? Co prawda, każdy obserwator, dokonując swojego pomiaru, wie z całą pewnością, jaki wynik otrzyma jego kolega. Cóż jednak z tego, skoro żaden z nich nie jest w stanie sterować otrzymywanymi wynikami, a jedynie je odczytywać? Próba przesyłania informacji za pomocą zjawiska EPR trochę przypominałaby pisanie listu urządzeniem losującym kolejno różne litery alfabetu. Znamy treść wysłanego listu, jednak nie potrafimy jej tworzyć.

4. Jaki jest werdykt?

Eksperymenty badające nierówności Bella (w nieco zmienionej formie, przystosowanej do możliwości praktycznych) zostały już wykonane. Jak dotąd, ogłaszano jednogłośne werdykty na korzyść mechaniki kwantowej: nierówności Bella są łamane! Cóż to może oznaczać? Na pewno tyle, że przyjęty przez nas dość ogólny model lokalnych teorii parametrów ukrytych nie jest poprawnym opisem praw przyrody. Wydaje się, że nic sobie ona nie robi z naszych zdroworozsądkowych oczekiwań.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

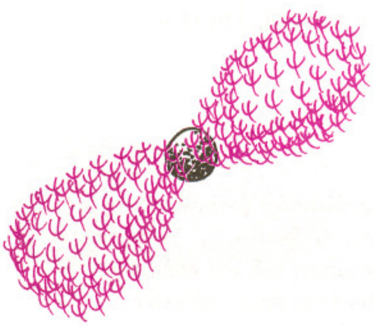
M 952. Dana jest funkcja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, gdzie $\mathbb{N}_0$ jest zbiorem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych. Udowodnić, że równość $f(f(n)) = n + 2001$ nie może być spełniona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.
Rozwiązanie na str. 15

M 953. Udowodnić, że istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ warunek $f(f(n)) = n^2$.
Rozwiązanie na str. 16

M 954. Funkcja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$f(n) = \begin{cases} n - 100 & \text{dla } n > 2000, \\ f(f(n+101)) & \text{dla } n \leq 2000. \end{cases}$$

Udowodnić, że funkcja przyjmuje dla wszystkich $n \leq 2000$ tę samą wartość i znaleźć ją.
Rozwiązanie na str. 9



Redaguje Ewa CZUCHRY

F 547. Średnia długość fali promieniowania żarówki o spiralnym włóknie, wykonanym z metalu, wynosi $12 \cdot 10^{-5}$ cm. Znaleźć liczbę fotonów, wysyłanych w jednostce czasu przez żarówkę o mocy 200 W.
Rozwiązanie na str. 6

F 548. Korzystając z prawa zachowania energii i pędu, wykazać, że swobodny elektron nie może pochłonąć fotonu.
Rozwiązanie na str. 7