Na koniec pozwolę sobie na pewną spekulację. Badając macierze n-wymiarowe, zauważamy ich odmienne zachowanie dla wymiarów parzystych i nieparzystych (np. w zachowaniu wyznacznika pierwotnego). Jeśli pójdziemy dalej i macierze uważać będziemy za obiekty geometryczne, to nie jest wykluczone, że różnice w zachowaniu się wyznacznika będą mogły być wyjaśnione na podstawie własności samej przestrzeni. Pewne własności metryczne są przecież zależne od parzystości bądź nieparzystości wymiaru: tak jest np. ze wzorem na objętość kuli n-wymiarowej. Między innymi z tego względu uważam, że traktowanie macierzy jako obiektów geometrycznych może być istotne.

Zbiory i „zbiory"

Jeśli zbiór to kolekcja, zgromadzenie pewnych obiektów (na przykład obdarzonych określoną własnością) w jedną całość, to rozpatrzmy kolekcję, gromadzącą wszystkie zbiory X o następującej, prostej do sformułowania własności: $X \notin X$. Jeśli ta kolekcja jest zbiorem Z, to sprawdzenie, czy Z ma rzeczoną własność, prowadzi do sprzeczności. Istotnie, gdy $Z \notin Z$, to Z spełnia warunek przynależności do Z, a więc $Z \in Z$. Jeśli zaś $Z \in Z$, to Z nie ma własności definiującej Z, zatem $Z \notin Z$. Tak więc Z jest kolekcją, która nie może być i nie jest zbiorem. Aby pozbyć się takich paradoksów, zaksjomatyzowano pojęcie zbioru.

Georg Cantor, matematyk, którego prace spowodowały narodziny teorii zbiorów (zwanej w Polsce teorią mnogości), udowodnił, że żaden zbiór nie ma dość elementów, by można było w sposób różnowartościowy każdemu podzbiorowi przypisać jeden element zbioru – na pewno nie wystarczy dla wszystkich podzbiorów. Owo twierdzenie Cantora ma ciekawe konsekwencje, wynika z niego w szczególności, że nie istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory. Inaczej mówiąc, nie istnieje żaden wielki nadzbiór, gromadzący w sobie *wszystkie* zbiory. Gdyby W był takim zbiorem, to należałby do niego każdy podzbiór zbioru W, bo każdy taki podzbiór jest przecież zbiorem, ale wtedy moglibyśmy każdemu podzbiorowi A zbioru W przypisać element W, mianowicie sam zbiór A – wbrew twierdzeniu Cantora. A więc kolekcja wszystkich zbiorów nie jest zbiorem. Co więcej, nie jest zbiorem nawet kolekcja wszystkich zbiorów jednoelementowych. Moglibyśmy przecież dla każdego zbioru A utworzyć jednoelementowy zbiór $\{A\}$ (którego jedynym elementem jest zbiór A) i potem – gdyby wszystkie zbiory jednoelementowe należały do jednego, wspólnego zbioru – wziąć sumę takich jednoelementowców (a na to teoria mnogości pozwala), a wtedy do takiej sumy należałby każdy zbiór – co jest przecież niemożliwe, jak przed chwilą widzieliśmy. Tak więc zbiorów jednoelementowych jest „za dużo", by można je było zebrać w zbiór. Ale to już nie jest paradoks: to twierdzenie teorii mnogości.

Jeśli $\mathcal{A}$ jest zbiorem, którego elementami są zbiory (taki zbiór nazywa się często *rodziną zbiorów*), to sumą rodziny $\mathcal{A}$ jest zbiór złożony z wszystkich tych i tylko tych elementów, które należą do choćby jednego zbioru z rodziny $\mathcal{A}$.

Takie zbiory-niezbiory (powiedzmy, „zbiory") spotyka się na tyle często, że pewnie warto coś z nimi zrobić, więc zrobiono. Wybrano rozwiązanie proste: zamiast pojęcia pierwotnego (czyli niedefiniowanego w teorii) „zbiór" wprowadzono pojęcie „klasa", definiując zbiór jako taką klasę, która jest elementem innej klasy. W ten sposób „zbiór" W stał się obiektem legalnym, podobnie jak „zbiór", do którego należą wszystkie zbiory. Po prostu owe „zbiory" są klasami, ale nie zbiorami (i nie mogą być elementami innej klasy).

Filateliści badają znaczki pocztowe, klasyfikują je i opisują, przeciętny śmiertelnik używa ich do wysyłania listów. Przeciętny śmiertelnik-matematyk używa zbiorów i „zbiorów", nie zastanawiając się nad ich klasyfikacją. I słusznie. Zamiast dzielić kolekcje na klasy i zbiory, można się umówić, że mówimy tylko o zbiorach, będących podzbiorami pewnego „wszechzbioru" (nazywanego niekiedy zbiorem uniwersalnym). Wtedy wystarczy zwykła, „bezklasowa" teoria mnogości. A filateliści mogą rozwijać dalej swoje zainteresowania…

Wiktor BARTOL

Rozwiązanie zadania F 545.
Różnica ciśnień w obu rurkach jest równa ciśnieniu hydrodynamicznemu przepływającej cieczy, czyli

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h.$$

Stąd

$$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$