

Po podobnych rachunkach, jak poprzednio ($s = t/u$), uzyskujemy kolejny wzór dający nieskończenie wiele trójek równych różnic dwóch sześciątów

$$(2) \quad \begin{aligned} & [u(u^9 + 9t^3u^6 + 3 \cdot 6^3t^6u^3 - 12^2 \cdot 3^3t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 - 2 \cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 + u^9)]^3 = \\ & = (u^{10})^3 - (3^3 \cdot 12^2 t^{10} - 5 \cdot 3^3 t^4 u^6)^3 = \\ & = [u(u^9 - 9t^3u^6 + 3 \cdot 6^3t^6u^3 + 12^2 \cdot 3^3t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 + 2 \cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 - u^9)]^3. \end{aligned}$$

Dla przykładu przy $t = 1$ i $u = 1$ mamy

$$-3230^3 - 2676^3 = 1^3 - 3753^3 = 4528^3 - 5262^3.$$

Jak łatwo zauważyć, również w przypadku tej tożsamości zmiana znaku jednego z parametrów powoduje jedynie zamianę rolami lewej i prawej różnicy sześciątów, nie mając wpływu na różnicę środkową, ale kolejne wyrażenia, które po podniesieniu do sześciątu tworzą odjemne czy też odjemniki, nie tworzą tu już ciągu arytmetycznego.

Ustalenie, czy i przy jakich warunkach uzyskamy z drugiego ze wzorów różnice dwóch dodatnich sześciątów, wykracza poza temat niniejszego artykułu ze względu na konieczność rozwiązywania skomplikowanych układów nierówności wyższych stopni i analizy bardzo dużych liczb występujących we wzorze (2). Z obu wzorów (1) i (2) wynika, że mamy nieskończenie wiele trójek równych różnic sześciątów liczb całkowitych i wymiernych. Podane wyżej wzory nie wyczerpują wszystkich możliwości. Mamy np. rozwiązanie w liczbach całkowitych nie wynikające z wyżej wymienionych wzorów

$$172^3 - 135^3 = 144^3 - 71^3 = 138^3 - (-1)^3.$$

To pozwala przypuszczać, że mogą istnieć także czwórki równych różnic dwóch sześciątów liczb całkowitych.

LITERATURA

- [1] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, 1950.
- [2] W. Sierpiński, *Teoria liczb cz. 2*, 1959.
- [3] W. Sierpiński, *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, 1956.
- [4] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, 1952.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Zadania te należy rozwiązać metodami czysto geometrycznymi.

M 949. Udowodnić równość

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 950. Udowodnić równość

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

Rozwiązanie na str. 15

M 951. Udowodnić równość

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = 2.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 545. Przez poziomą rurę z dwoma pionowymi odpowietrzaczami przepływa płyn doskonały. Różnica między poziomami cieczy w rurkach a i b wynosi 10 cm. Średnice rurek są takie same. Wyznaczyć prędkość płynu w poziomej rurze.
Rozwiązanie na str. 13

F 546. Na dnie pionowego cylindra o średnicy $D = 0,5$ m znajduje się dziura o średnicy $d = 1$ cm. Wyznaczyć zależność między szybkością obniżania się poziomu cieczy w naczyniu a wysokością tego poziomu.
Rozwiązanie na str. 16

