Trzy równe różnice dwóch sześcianów

Aleksander GÓRSKI

Wielu matematyków interesowało zagadnienie dwóch równych różnic dwóch sześcianów, a w szczególności rozwiązania tego zagadnienia w liczbach całkowitych, ewentualnie wymiernych. Do najbardziej znanych rozwiązań należą wzory Ramanujana, Eulera i Bineta, a także wzór

$$[x(x^3+2y^3)]^3-[y(2x^3+y^3)]^3=[x(x^3-y^3)]^3-[-y(x^3-y^3)]^3.$$

Tożsamość Ramanujana to wzór
$$p^3-q^3=r^3-t^3$$
dla
$$p=6a^2-4ab+4b^2,$$
$$q=4a^2-4ab+6b^2,$$
$$r=5a^2-5ab-3b^2.$$
$$t=-3a^2-5ab+5b^2,$$

Wzór Eulera i Bineta to z kolei wzór
$$p^3-q^3=r^3-t^3$$
dla
$$p=1+(2b)^3-(a-b)^3,$$
$$q=a+3b-(a^2+3b^2)^2,$$
$$r=-1+(2b)^3+(a+b)^3,$$
$$t=-a+3b+(a^2+3b^2)^2.$$

Są nawet dwie równe sumy trzech bisześcianów, np.

$$3^6+19^6+22^6=10^6+15^6+23^6.$$

Można jednak zapytać, czy istnieją trzy równe różnice dwóch sześcianów, a jeśli tak, to czy ilość rozwiązań tego zagadnienia jest skończona, czy nie. Wyjdźmy z tożsamości Gerardina, według której liczbę 1 możemy przedstawić na nieskończenie wiele sposobów:

$$1=(9k^4)^3+(1+9k^3)^3-(9k^4+3k)^3.$$

Gdy za k podstawimy $-k$, to otrzymamy

$$1=(9k^4)^3+(1-9k^3)^3-(9k^4-3k)^3.$$

Z porównania obu tych równości mamy

$$(9k^4-3k)^3-(1-9k^3)^3=(9k^4)^3-1=(9k^4+3k)^3-(1+9k^3)^3.$$

Wykonując z kolei podstawienie $k=n/m$, otrzymamy szukany wzór dający nam nieskończenie wiele trójek równych różnic dwóch sześcianów

$$(1)\quad \begin{aligned}(9n^4-3m^3n)^3-(m^4-9mn^3)^3&=(9n^4)^3-(m^4)^3=\\&=(9n^4+3m^3n)^3-(m^4+9mn^3)^3.\end{aligned}$$

Powyższy wzór charakteryzuje się łatwymi do zauważenia własnościami:

1. Zmiana znaku na przeciwny jednego z parametrów m lub n powoduje jedynie zamianę rolami lewej i prawej różnicy sześcianów przy zachowaniu środkowej różnicy bez zmian.
2. Wszystkie trzy wyrażenia, które po podniesieniu do sześcianu stanowią odjemne, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $3m^3n$, a wszystkie trzy wyrażenia, które po podniesieniu do sześcianu stanowią odjemniki, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $9mn^3$.
3. Po podstawieniu $m_1=3n$ oraz $n_1=m$ otrzymamy wzór na nieskończenie wiele trójek różnic dwóch sześcianów, w którym liczby podnoszone do sześcianu są 9-krotnością liczb podnoszonych do sześcianu ze wzoru (1). Takie rozwiązania nic istotnego do całokształtu zagadnienia nie wnoszą.

Przykładowo mamy dla
$m=1,\ n=1$
$$6^3-(-8)^3=9^3-1^3=12^3-10^3,$$
$m=2,\ n=1$
$$-15^3-(-2)^3=9^3-16^3=33^3-34^3,$$
$m=1,\ n=2$
$$138^3-(-71)^3=144^3-1^3=150^3-73^3.$$

Zauważamy również, że środkowa różnica sześcianów $(9n^4)^3-(m^4)^3$ jako różnica kwadratów jest zawsze różnicą sześcianów liczb dodatnich. Nasuwa się pytanie, czy pozostałe dwie różnice sześcianów mogą być jednocześnie różnicami dwóch sześcianów dodatnich. Odrzucając rozwiązania z parametrami m lub n ujemnymi, które nic nowego poza przestawieniem prawej i lewej różnicy sześcianów nie wnoszą, widzimy, że i prawa różnica sześcianów jest różnicą sześcianów dodatnich. Po przeanalizowaniu odpowiednich nierówności okaże się, że otrzymamy trzy różnice sześcianów dodatnich, gdy zachodzi zależność

$$\sqrt[3]{3}\le\frac{m}{n}\le\sqrt[3]{9},$$

z tym, że lewą różnicę sześcianów ujemnych można uznać za przestawioną różnicę sześcianów dodatnich.

Na przykład mamy dla
$m=2,\ n=1,\ m/n=2$:
$$-15^3-(-2)^3=2^3-15^3=$$
$$=9^3-16^3=33^3-34^3$$
$m=5,\ n=3,\ m/n=1{,}67$:
$$-396^3-(-590)^3=590^3-396^3=$$
$$=729^3-625^3=1854^3-1840^3$$

Tożsamość Gerardina nie jest jedynym sposobem wyrażenia liczby 1 za pomocą trzech sześcianów na nieskończenie wiele sposobów. Do podobnych wniosków dojdziemy, analizując tożsamość

$$1=[3^3s^4(12^2s^6-5)]^3-[3s(6^4s^9+2\cdot 6^3s^6+3^3s^3-1)]^3+(3^312^2s^9+3\cdot 6^3s^6-9s^3+1)^3.$$

Po podobnych rachunkach, jak poprzednio ($s = t/u$), uzyskujemy kolejny wzór dający nieskończenie wiele trójek równych różnic dwóch sześcianów

$$\begin{aligned}
&[u(u^9 + 9t^3u^6 + 3\cdot 6^3t^6u^3 - 12^2 3^3 t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 - 2\cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 + u^9)]^3 = \\
&= (u^{10})^3 - (3^3 12^2 t^{10} - 5\cdot 3^3t^4u^6)^3 = \\
&= [u(u^9 - 9t^3u^6 + 3\cdot 6^3t^6u^3 + 12^2 3^3 t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 + 2\cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 - u^9)]^3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Dla przykładu przy $t = 1$ i $u = 1$ mamy

$$-3230^3 - 2676^3 = 1^3 - 3753^3 = 4528^3 - 5262^3.$$

Jak łatwo zauważyć, również w przypadku tej tożsamości zmiana znaku jednego z parametrów powoduje jedynie zamianę rolami lewej i prawej różnicy sześcianów, nie mając wpływu na różnicę środkową, ale kolejne wyrażenia, które po podniesieniu do sześcianu tworzą odjemne czy też odjemniki, nie tworzą tu już ciągu arytmetycznego.

Ustalenie, czy i przy jakich warunkach uzyskamy z drugiego ze wzorów różnice dwóch dodatnich sześcianów, wykracza poza temat niniejszego artykułu ze względu na konieczność rozwiązywania skomplikowanych układów nierówności wyższych stopni i analizy bardzo dużych liczb występujących we wzorze (2). Z obu wzorów (1) i (2) wynika, że mamy nieskończenie wiele trójek równych różnic sześcianów liczb całkowitych i wymiernych. Podane wyżej wzory nie wyczerpują wszystkich możliwości. Mamy np. rozwiązanie w liczbach całkowitych nie wynikające z wyżej wymienionych wzorów

$$172^3 - 135^3 = 144^3 - 71^3 = 138^3 - (-1)^3.$$

To pozwala przypuszczać, że mogą istnieć także czwórki równych różnic dwóch sześcianów liczb całkowitych.

LITERATURA

[1] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, 1950.
[2] W. Sierpiński, *Teoria liczb cz. 2*, 1959.
[3] W. Sierpiński, *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, 1956.
[4] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, 1952.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Zadania te należy rozwiązać metodami czysto geometrycznymi.

M 949. Udowodnić równość

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 950. Udowodnić równość

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

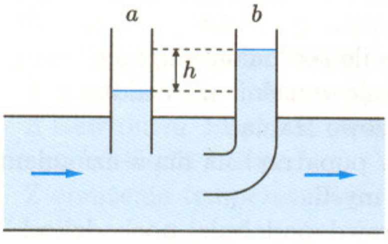
Rozwiązanie na str. 15

M 951. Udowodnić równość

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12} = 2.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 545. Przez poziomą rurę z dwoma pionowymi odpowietrzaczami przepływa płyn doskonały. Różnica między poziomami cieczy w rurkach a i b wynosi 10 cm. Średnice rurek są takie same. Wyznaczyć prędkość płynu w poziomej rurze.
Rozwiązanie na str. 13

F 546. Na dnie pionowego cylindra o średnicy $D = 0{,}5$ m znajduje się dziura o średnicy $d = 1$ cm. Wyznaczyć zależność między szybkością obniżania się poziomu cieczy w naczyniu a wysokością tego poziomu.
Rozwiązanie na str. 16