

## LITERATURA

- [1] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1973.
- [2] W. Żakowski, *Matematyka, ćwiczenia problemowe dla politechnik*, WNT, Warszawa 1987.
- [3] *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Amer. Math. Monthly 64 (1957), no 7, part 2 (tłumaczenie rosyjskie: Izd. „Mir”, Moskwa 1977).
- [4] W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, cz. I: liczby rzeczywiste, ciągi, szeregi liczbowe*, Wyd. UMCS, Lublin 1996.
- [5] G.J. Parker, S. Abbott, *Complex power iterations*, Math. Gaz. 81 (1997), 431-434.

$$\begin{cases} x = e^{-y\pi/2} \cos\left(x\frac{\pi}{2}\right), \\ y = e^{-x\pi/2} \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

którego bezpośrednie rozwiązanie bez użycia komputera jest trudne. Komputerowa analiza tego układu lub otrzymanego z niego równania przestępnego

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$$

przekonuje nas, że granicę ciągu (c) rzeczywiście zadowalająco przybliża wartość  $i(1000)$ .

Interesująca może być odpowiedź na ogólniejsze pytanie:

PYTANIE 2. Dla jakich liczb zespolonych ciąg określony wzorem

$$(1) \quad a_1 = z, a_{n+1} = z^{a_n}, n = 1, 2, \dots,$$

$$(2) \quad a_1 = z, a_2 = z^i, a_3 = z^{i^i}, \dots$$

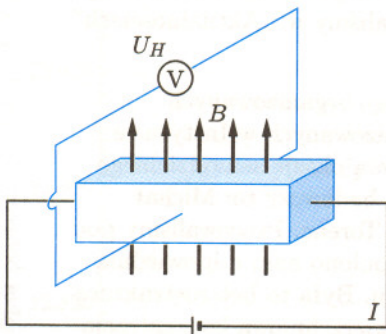
jest zbieżny? Warto naszkicować ten zbiór na płaszczyźnie zespolonej.

Wydaje się, że w rozwiązaniu tego typu zagadnień bardzo pomocne mogą być symulacje komputerowe. Może prowadzą one do fraktali... Wszystkim, którzy podejmą się pracy nad tymi problemami, życzę sukcesu!

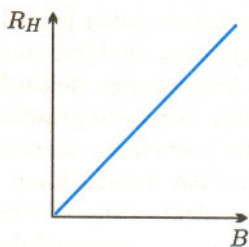
## Kwantowy efekt Halla

Michał KORCH

Jest to sprawozdanie z Warsztatów Fizyki Ciała Stałego organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, spisane przez jednego z uczestników.



Rys. 1. Efekt Halla.



Rys. 2. Zależność oporu Halla od indukcji pola magnetycznego w klasycznym efekcie Halla.

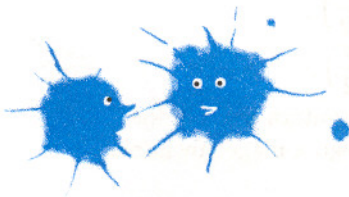
W 1879 roku Edwin Robert Hall odkrył, że jeśli przewodnik, przez który płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I$ , umieścimy w polu magnetycznym o indukcji  $B$ , prostopadłej do kierunku prądu, to w przewodniku powstaje poprzeczne napięcie elektryczne  $U_H$ . Napięcie to można zmierzyć, podłączając woltomierz do bocznych kontaktów tak, jak to pokazano na rysunku 1.

Zjawisko to jest wynikiem działania siły Lorentza na swobodne nośniki prądu. Jeśli tymi nośnikami są elektrony, to siła Lorentza odchyli je w kierunku jednej ze ścianek, pozostawiając przy przeciwnej ściance nadmiar ładunku dodatniego. W rezultacie w przewodniku powstanie poprzeczne pole elektryczne, działające na elektrony siłą przeciwną do siły Lorentza i zapobiegające dalszemu rozsuwaniu ładunków. Napięcie poprzeczne  $U_H$  jest iloczynem tego pola i szerokości przewodnika. To klasyczne zjawisko zostało nazwane, na cześć odkrywcy, efektem Halla. Jest ono bardzo ważne w fizyce metali i półprzewodników, ponieważ pozwala na określenie znaku i koncentracji nośników prądu. Dzieląc napięcie poprzeczne  $U_H$  przez natężenie  $I$  prądu płynącego przez przewodnik, otrzymujemy tzw. opór Halla

$$(1) \quad R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{e \cdot n \cdot d},$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem nośnika prądu,  $n$  – liczbą nośników w jednostce objętości przewodnika, a  $d$  – grubością przewodnika. Ze wzoru (1) wynika, że opór  $R_H$  jest liniową funkcją indukcji pola magnetycznego. Zauważmy jeszcze, że opór Halla jest odwrotnie proporcjonalny do grubości przewodnika.

Czy to oznacza, że może on być dowolnie duży dla odpowiednio cienkiej warstwy przewodzącej? Oczywiście nie, naturalną granicę ścieniania stanowi chociażby rozmiar pojedynczej komórki elementarnej sieci krystalicznej materiału przewodnika. Co więcej, należy podkreślić, że elektrony mają również naturę falową i do pełnego ich opisu konieczne jest użycie mechaniki kwantowej. W jej ramach pokazano, że klasyczny opis załamuje się, gdy grubość warstwy  $d$  staje się porównywalna z długością fali elektronu. Wtedy energia kinetyczna ruchu



elektronów w kierunku prostopadłym do warstwy przyjmuje tylko dyskretne (skwantowane) wartości. Jednak dla dwóch pozostałych kierunków nadal będzie się ona zmieniać w sposób ciągły. W ten sposób gaz elektronowy uzyskuje charakter dwuwymiarowy i opór Halla przestaje zależeć od grubości. Wtedy jednak zamiast wzoru (1) możemy napisać

$$(2) \quad R_H = \frac{B}{e \cdot n_d},$$

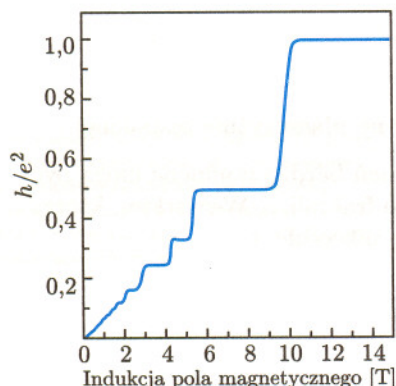
gdzie  $n_d$  jest liczbą nośników, przypadających na jednostkę powierzchni warstwy. Wzór (2), podobnie jak (1), przewiduje liniowy wzrost oporu Halla w polu magnetycznym. Jednakże badania doświadczalne pokazały, że przewidywanie to nie do końca jest słuszne. Stwierdzenie tego stało się możliwe dzięki osiągnięciom technologii półprzewodników ostatnich kilkudziesięciu lat, które pozwoliły na praktyczną realizację dwuwymiarowych układów elektronowych. Typowa grubość warstwy przewodzącej wynosi dla nich 10 nanometrów. Odpowiednio cienkie próbki otrzymuje się przez nakładanie kolejnych warstw atomowych przewodnika na izolujące podłoże za pomocą techniki znanej pod nazwą epitaksji z wiązek molekularnych (MBE).

W 1980 roku Klaus von Klitzing z Instytutu Maxa Plancka ze Stuttgartu badał efekt Halla w takim właśnie dwuwymiarowym gazie elektronowym. Niespodziewanie okazało się, że w odpowiednio silnym polu magnetycznym i w bardzo niskiej temperaturze zależność oporu Halla od indukcji nie odpowiada linii prostej, lecz ma charakter „schodkowy”. Opór ten przyjmuje kolejne stałe wartości

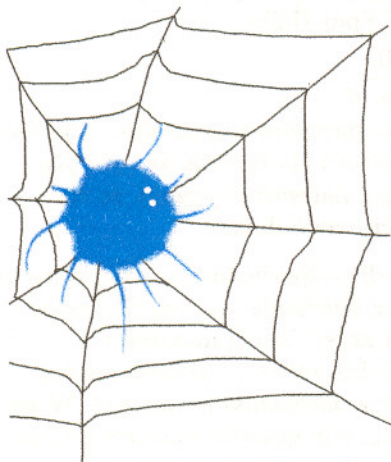
$$R_H = \frac{h}{i \cdot e^2},$$

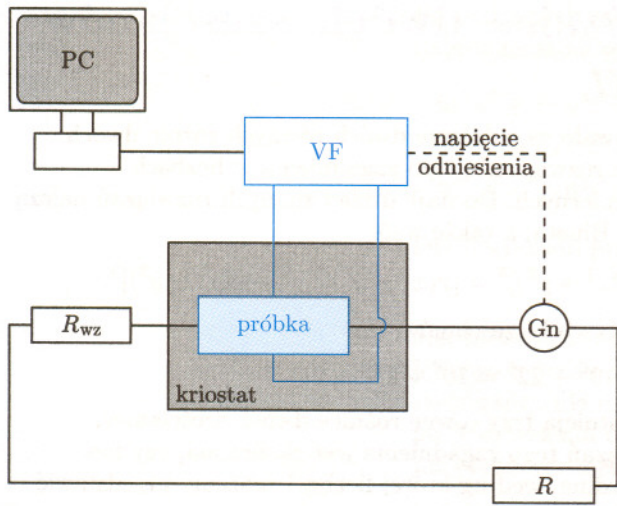
gdzie  $h$  jest stałą Plancka,  $e$  – ładunkiem elektronu, a  $i$  – liczbą naturalną (patrz rysunek 3). Największym zaskoczeniem w uzyskanych wynikach jest niezwykle „płaskość” schodków. Późniejsze badania wykazały, że wartość oporu w obszarze pojedynczego schodka jest stała z dokładnością lepszą niż  $10^{-10}$ . Ponadto stwierdzono, że dopóki próbka stanowi gaz dwuwymiarowy, to efekt jest zupełnie niezależny od innych, szczegółowych własności, takich jak: geometryczny kształt, koncentracja nośników czy rodzaj użytego materiału. Wszystko to sprawiło, że ten tzw. kwantowy efekt Halla, którego odkrycie zostało nagrodzone Nagrodą Nobla w 1985 roku, jest naturalnym kandydatem na wzorzec oporu elektrycznego. (O kwantowym efekcie Halla pisaliśmy w „Aktualnościach” w numerze 12/1998 – redakcja.)

Uczestnicząc w Warsztatach Fizyki Ciała Stałego organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, zorganizowanych w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie, uzyskaliśmy wyjątkową okazję samodzielnego pomiaru kwantowego efektu Halla. Nasz zespół badawczy to: Michał Korch, Paweł Parys, Piotr Powałowski i Jakub Torenc. Pracowaliśmy pod kierunkiem dr. Grzegorza Grabeckiego. Udostępniono nam odpowiednią próbkę z dwuwymiarowym gazem elektronowym. Była to heterostruktura półprzewodnikowa AlGaAs/GaAs, w której powierzchniowa koncentracja elektronów wynosiła  $3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Mieliśmy również dostęp do elektromagnesu nadprzewodzącego, umożliwiającego generowanie pola magnetycznego o indukcji do 9 T i układu niskotemperaturowego pozwalającego schłodzić naszą próbkę do temperatury rzędu jednego Kelvina. Nie będziemy tutaj jednak szczegółowo opisywać tych elementów układu, lecz zajmiemy się tym, co nas zainteresowało najbardziej, czyli wielką dokładnością kwantowego efektu Halla. Postanowiliśmy ją samodzielnie sprawdzić. Nie mogliśmy liczyć, co prawda, na osiągnięcie dokładności  $10^{-10}$ , gdyż to wymagałoby posiadania niezwykle wyrafinowanej aparatury. My mieliśmy do dyspozycji tylko standardową aparaturę służącą do niskotemperaturowych pomiarów elektrycznych. Niestety, do dokładnych pomiarów oporu Halla nie można zastosować, używanej do „zwykłych” oporników, metody mostka Wheatstone’a, ponieważ osobnymi sondami przepuszcza się prąd i osobnymi sondami mierzy się napięcie. Dlatego zastosowaliśmy układ pomiarowy, przedstawiony schematycznie na rysunku 4.



Rys. 3. Zależność oporu Halla od indukcji pola magnetycznego w kwantowym efekcie Halla.

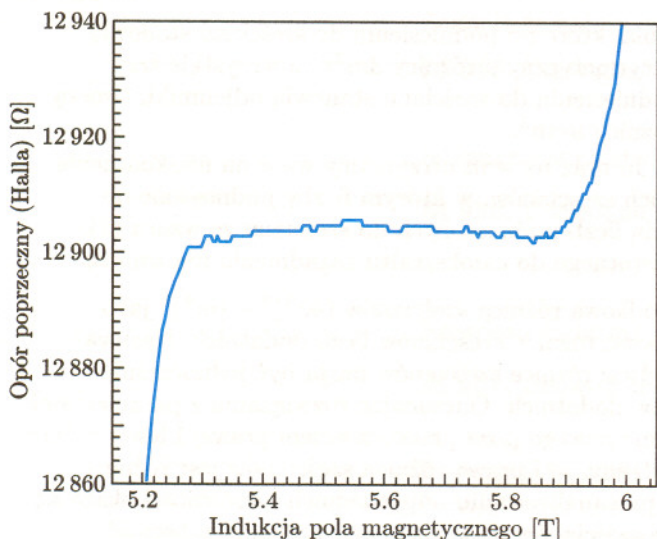




Rys. 4. Układ pomiarowy.

Nasza „dwuwymiarowa” warstwa, umieszczona w kriostacie niskotemperaturowym, została połączona szeregowo z opornikiem dekadowym  $R_{wz}$  o dokładności 0,05% (najdokładniejszym, jaki znaleźliśmy w pracowni). Pełnił on w naszym eksperymencie funkcję oporu wzorcowego. Zasada pomiaru oporu Halla polegała na porównaniu, za pomocą tego samego miernika, napięcia Halla z napięciem na oporze wzorcowym. Chociaż wydaje się ona bardzo prosta, to nie możemy zapominać, że nasza próbka była umieszczona w bardzo niskiej temperaturze, rzędu 1 K. W takim przypadku bardzo istotne jest ograniczenie ciepła Joule’a wywołanego przepływem prądu. Przepuszczany prąd musiał być mniejszy od  $1 \mu\text{A}$ , w związku z czym wartości mierzonego napięcia sięgały zaledwie kilku miliwoltów. W takiej sytuacji zwykły woltomierz dawałby zbyt małą dokładność ze względu na zbyt mały stosunek sygnału do szumu. Zastosowaliśmy więc technikę zmiennoprądową

z woltomierzem fazoczułym VF. Prąd przemienny w obwodzie był wzbudzany za pomocą generatora Gn (amplituda około 1 V, częstotliwość 18 Hz), a natężenie prądu ograniczyliśmy, włączając w szereg bardzo duży opornik  $R$ , rzędu  $10 \text{ M}\Omega$  (rys. 4). Zasada fazoczułego pomiaru polega na jednoczesnym pomiarze słabego i obciążonego szumami sygnału z próbki i napięcia odniesienia, pochodzącego z tego samego generatora Gn. Woltomierz „porównuje” częstotliwość i fazę obu napięć przemiennych i „oczyszcza” mierzony sygnał z wszelkich przypadkowych szumów. Oczyszczony sygnał wyjściowy był przetwarzany na postać cyfrową za pomocą 16-bitowego przetwornika analogowo-cyfrowego i kierowany przez interfejs do komputera PC. Na wzorcowym oporniku dekadowym ustawiana była wartość oporu bliska przewidywanej dla danego schodka, według wzoru (3). Mierząc opór wzorcowy, należało pamiętać, aby wykonywać ten pomiar dokładnie w tych samych warunkach, co pomiar oporu Halla, tj. w silnym polu magnetycznym, odpowiadającym badanemu schodkowi. Wynika to z faktu, że opór szeregowy próbki wraz z kontaktami elektrycznymi zależy od pola magnetycznego, co może prowadzić do pewnych zmian prądu w obwodzie.



Rys. 5. Zależność oporu poprzecznego próbki od indukcji magnetycznej. Schodek dla  $i = 2$ .

Przykładowy wynik dla schodka  $i = 2$  jest przedstawiony na rysunku 5. Skala pionowa została wyznaczona przez porównanie z oporem wzorcowym. Wyznaczona wartość oporu schodka wynosi  $12903 \pm 6 \Omega$ . Zgadza się to bardzo dobrze z wartością teoretyczną  $12906 \Omega$ . Błąd względny naszego pomiaru wynosi 0,05% i wynika on, oczywiście, z ograniczonej dokładności oporu wzorcowego. Zauważmy jednak, że schodek na rysunku 5 jest praktycznie płaski, a niewielkie odchylenia mają charakter prostokątnych skoków o wartości około  $1 \Omega$ . Jest to wynik zmian zero-jedynkowych najmniej znaczącego bitu naszego przetwornika analogowo-cyfrowego. To jest, oczywiście, najmniejsza zmiana oporu, którą mogliśmy wykryć i stanowi ona granicę dokładności bezwzględnej pomiaru. A zatem schodek jest rzeczywiście niezwykle płaski, tak że przy użyciu naszej aparatury jego nachylenia nie byliśmy w stanie uchwycić. Możemy jedynie powiedzieć, że względna dokładność kwantyzacji oporu jest lepsza niż  $8 \cdot 10^{-5}$ , bowiem takiej wartości odpowiada właśnie najmniejszy skok oporu. Przekonaliśmy się zatem osobiście

o niezwyklej dokładności kwantowego efektu Halla. A może ktoś z Czytelników zaproponowałby jakąś metodę pozwalającą na dalsze zwiększenie dokładności naszych pomiarów przy użyciu tej samej aparatury?

Uczestnicy Warsztatów bardzo serdecznie dziękują dr. Grzegorzowi Grabeckiemu i Instytutowi Fizyki PAN za umożliwienie samodzielnych badań i stałą pomoc przy ich przeprowadzaniu.