Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z fizyki nr 316, 317

Redaguje Jerzy B. BROJAN

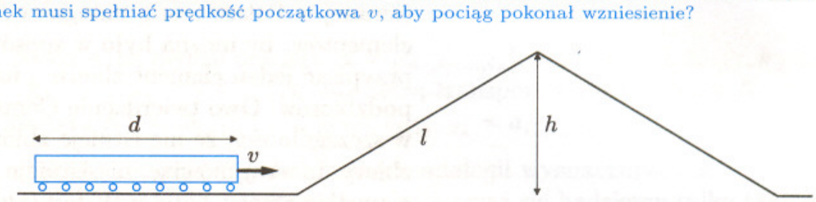
316. Wahadło Foucaulta zawieszone na linie o długości 10 m zostało odchylone od pionu o 1,5 m i puszczone. Jeśli zdarzyło się to w Warszawie, to w jakiej odległości od swojego położenia równowagi przeleci środek masy wahadła?

317. W Kosmosie jest więcej neonu niż argonu, a jednak atmosfera Ziemi zawiera prawie 1% argonu i tylko 0,0018% neonu. Podać możliwe przyczyny tej rozbieżności.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2000

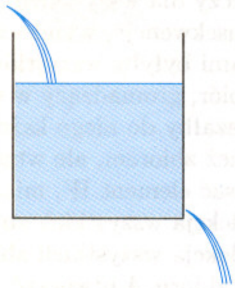
Przypominamy treść zadań:

308. Pociąg o długości d jedzie po torze, na którym występuje wzniesienie o kształcie „trójkątnym" (rys. 1), przy czym długość każdego z odcinków równi pochyłej wynosi l, a wysokość – h. Jeśli rozkład masy wzdłuż pociągu jest jednorodny, a opory ruchu można zaniedbać (i nie ma też napędu), to jaki warunek musi spełniać prędkość początkowa v, aby pociąg pokonał wzniesienie?



Rys. 1

309. Do izolowanego termicznie zbiornika zawierającego wodę o masie M wpływa strumień wody o masie na jednostkę czasu równej α i dokładnie miesza się z wodą w zbiorniku. Jednocześnie ze zbiornika wypływa stałym strumieniem taka sama ilość wody. Wykazać, że jeśli temperatura T wpływającej wody zależy harmonicznie od czasu z amplitudą T_0 i częstością ω (tzn. $T(t) = T_0 \sin\omega t + T_1$), to temperatura wody wypływającej także zależy harmonicznie od czasu. Obliczyć amplitudę jej zmian.



Rys. 2

308. Należy oddzielnie rozpatrzyć dwa przypadki:

a) Gdy $d \geq 2l$, energia kinetyczna pociągu musi wystarczyć do wzniesienia odcinka pociągu o długości $2l$ i masie $2ml/d$ na wysokość $(1/2)h$ (wartość średnia), czyli

$$\frac{mv^2}{2} \geq \frac{2ml}{d} g \frac{h}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{v^2}{gh} \geq \frac{2l}{d}.$$

b) Gdy $d \leq 2l$, środek masy pociągu musi się wznieść na wysokość $\frac{l - d/4}{l}h$, a stąd

$$\frac{v^2}{gh} \geq 2 - \frac{d}{2l}.$$

309. Ze względu na mieszanie woda ma w całej objętości zbiornika jednakową temperaturę, równą temperaturze strumienia wypływającego – oznaczmy ją $T'(t)$. W ciągu czasu $\mathrm{d}t$ do zbiornika wpływa woda o masie $\alpha \mathrm{d}t$ i temperaturze $T(t)$, a bilans ciepła ma postać

$$\alpha \mathrm{d}t(T - T') = M\mathrm{d}T'.$$

Rozwiążemy to równanie „od tyłu", tzn. założymy, że $T'(t) = T_0' \sin\omega t + T_1$ (inaczej konieczna byłaby znajomość techniki rozwiązywania równań różniczkowych). Otrzymujemy

$$T = T' + \frac{M}{\alpha}\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = T_1 + T_0' \sin\omega t + T_0' \frac{M\omega}{\alpha} \cos\omega t.$$

Sumę ostatnich dwóch wyrazów można przekształcić do postaci $T_0 \sin(\omega t + \varphi)$, co jest zgodne z podaną zależnością $T(t)$. Przesunięcie fazy φ jest tu mało istotne – można je wyeliminować w funkcji $T(t)$, a za to wprowadzić w $T'(t)$. Amplituda T_0 wynosi

$$T_0 = T_0' \sqrt{1 + (M\omega/\alpha)^2}.$$

Dzieląc równanie przez pierwiastek, znajdujemy rozwiązanie – szukaną amplitudę T_0'.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 304 (WT=2,40), 305 (WT=4,00)
zadań 306 (WT=1,40) i 307 (WT=3,10)
z numerów 10/2000 i 11/2000

Marek Wójcicki	– Szczecin	41,97
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	38,06
Aleksander Surma	– Myszków	35,38
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	35,06
Tomasz Rudny	– Warszawa	25,62
Jarosław Łazuka	– Warszawa	34,93
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	15,34
Tomasz Wietecha	– Tarnów	15,29
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	14,39

Pan Piotrowski powraca do Ligi po ponad 8 latach przerwy!

Zadania z matematyki nr 419, 420

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2001

419. Wyznaczyć największą liczbę α oraz najmniejszą liczbę β takie, że nierówności

$$\alpha \le \frac{|PA|+|PB|+|PC|+|PD|}{|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD|} \le \beta$$

zachodzą dla każdego czworościanu $ABCD$ i dla każdego punktu P leżącego wewnątrz tego czworościanu.

420. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $a+b=c+d$. Dowieść, że jeżeli nierówność $a^n+b^n>c^n+d^n$ zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n>1$, to zachodzi ona dla każdej liczby naturalnej $n>1$.

Zadanie **420** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2000

Przypominamy treść zadań:

411. Ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,56\}$ usunięto sześć liczb. Dowieść, że z pozostałego zbioru można wybrać czterowyrazowy ciąg (a,b,c,d) różnych liczb, w którym każdy wyraz (od drugiego począwszy) jest liczbą podzielną przez wyraz poprzedni.

412. Dla ustalonej liczby naturalnej n obliczyć minimalną wartość, jaką może mieć suma odwrotności długości wszystkich boków i przekątnych n-kąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

411. Przedstawiamy zbiór $M=\{1,2,3,\ldots,56\}$ jako sumę pięciu zbiorów:

$$A=\{1,2,4,8,16,32\},$$
$$B=\{3,6,12,24,48\},$$
$$C=\{5,10,20,40\},$$
$$D=\{7,14,28,56\}$$

oraz

$$E=M\setminus(A\cup B\cup C\cup D).$$

Zbiory A, B, C, D liczą łącznie 19 elementów, zatem E jest zbiorem 37-elementowym. Po usunięciu sześciu liczb ze zbioru M pozostaje w nim pięćdziesiąt liczb, z których co najmniej trzynaście należy do sumy $A\cup B\cup C\cup D$. Co najmniej jeden ze zbiorów A, B, C, D zawiera cztery z tych trzynastu liczb; tworzą one ciąg (a,b,c,d) o wymaganej własności.

412. Wielokąt ma n boków, n przekątnych łączących co drugi wierzchołek itd., n przekątnych łączących co k-ty wierzchołek, dla $k\le m=[(n-1)/2]$; gdy n jest liczbą parzystą, wielokąt ma ponadto $n/2$ przekątnych „głównych" (łączących pary wierzchołków przeciwległych).

Ustalmy $k\in\{1,\ldots,m\}$ i weźmy pod uwagę przekątne łączące co k-ty wierzchołek (dla $k=1$ są to boki wielokąta). Te przekątne wyznaczają n kątów środkowych $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Długość i-tej przekątnej wynosi $2\sin(\alpha_i/2)$. Obszary tych kątów pokrywają k-krotnie kąt pełny wokół środka koła, więc $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2k\pi$.

Z nierówności Jensena dla funkcji $f(x)=1/\sin x$, wypukłej w przedziale $(0;\pi)$, wynika dolne oszacowanie sumy odwrotności długości rozważanych przekątnych:

$$s_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sin(\alpha_i/2)}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)\ge\frac{n}{2}\cdot f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2}\right)=\frac{n}{2}\cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Biorąc pod uwagę wszystkie boki i przekątne, z wyjątkiem „głównych", dostajemy oszacowanie dolne

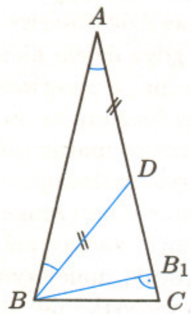
$$s_1+s_2+\ldots+s_m\ge\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{m}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}.$$

Każda z przekątnych głównych (dla n parzystego) jest nie dłuższa niż średnica koła, równa 2, więc suma odwrotności ich długości jest nie mniejsza niż $(n/2)\cdot(1/2)$, czyli $n/4$. Wobec tego pełna suma S, o której mowa w zadaniu, spełnia nierówność

$$S\ge\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}+\varepsilon\cdot\frac{n}{4},\qquad\text{gdzie}\quad\varepsilon=\begin{cases}1 & \text{dla } n \text{ parzystych},\\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych}.\end{cases}$$

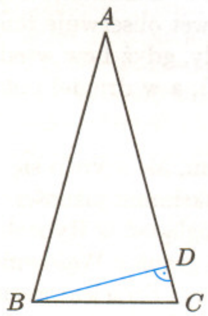
Równość w tym szacowaniu zachodzi dla n-kąta foremnego, a zatem napisana po prawej stronie liczba jest szukaną wartością minimalną.

Rozwiązanie zadania M 950.
Rozważmy trójkąt równoramienny ABC z kątami $\frac{\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$.



Niech $BB_1=1$ będzie wysokością w trójkącie ABC, D zaś takim punktem na $\overline{AC}$, że $AD=BD$. Wtedy $\angle BDC=\frac{2\pi}{7}$. Z trójkątów ABB_1, BDB_1, BCB_1 mamy $AB=AC=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$, $BD=AD=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}$, $CD=BC=\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$. Z równości $AC=AD+CD$ wynika teraz teza.

Rozwiązanie zadania M 951.
Rozważmy taki trójkąt równoramienny ABC, że $\angle A=\frac{\pi}{6}$, $AB=AC$.



Niech $BD=1$ będzie jego wysokością. Wtedy $AB=AC=2$, $AD=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$, $CD=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$ i z równości $AD+CD=AC$ wynika teza.