Igraszki z ciągiem liczbowym

Jarosław GÓRNICKI

Część I

Możemy stwierdzić, że ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$ jest zbieżny, nie obliczając jego granicy. Wystarczy, że zbadamy dwie jego własności:

- monotoniczność, czyli czy stale $a_{n+1} \geq a_n$, czy też stale $a_{n+1} \leq a_n$ (warunki te można osłabić żądając, by wskazane nierówności były spełnione dla wszystkich numerów n, poczynając od pewnego k),
- ograniczoność, czyli czy wszystkie wyrazy ciągu mieszczą się w pewnym skończonym przedziale.

Wówczas możemy skorzystać z bardzo prostego i użytecznego twierdzenia [1].

TWIERDZENIE 1. Ciąg liczb rzeczywistych, który jest monotoniczny i ograniczony, jest zbieżny.

Wyposażeni w takie kryterium spróbujmy zbadać zbieżność następujących ciągów:

$$\text{(a)}\quad \sqrt{2},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ \ldots,$$

$$\text{(b)}\quad \sqrt{3},\ \sqrt{3}^{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}},\ \ldots.$$

W obu przypadkach bez trudu stwierdzamy, że są to ciągi rosnące (każdy wyraz następny jest większy od poprzedniego). Zbadajmy teraz ich ograniczoność.

Ciąg (a) jest ograniczony. Łatwo wykazujemy to za pomocą indukcji matematycznej:

$$a_1 = \sqrt{2} < 2 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} < (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Zatem ciąg (a) jest zbieżny! Jak obliczyć (wyznaczyć) jego granicę? Załóżmy, że liczba g (musi ona należeć do przedziału $[\sqrt{2}, 2]$) jest granicą tego ciągu. Ponieważ między następnym a poprzednim wyrazem ciągu zachodzi zależność

$$a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n},$$

mamy więc równanie

$$g = (\sqrt{2})^g,$$

które wystarczy rozwiązać. W tym przypadku łatwo odgadujemy, że $g = 2$, a ponieważ na przedziale $[\sqrt{2}, 2]$ funkcja $x \to \dfrac{\log_2 x}{x}$ jest ciągła i rosnąca, zatem jest to rozwiązanie jedyne. Konkluzja jest więc następująca: ciąg z przykładu (a) jest zbieżny do liczby 2.

W przypadku ciągu z przykładu (b) sytuacja jest odmienna. Ten ciąg nie jest ograniczony! Korzystając z indukcji matematycznej (i nierówności $2 \cdot (1{,}3)^{n+1} > n + 2$) możemy wykazać nierówność

$$b_n > (1{,}3)^{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

która oznacza to, że ciąg opisany w warunku (b) jest rozbieżny do $+\infty$. Te dwa zadania sugerują naturalne pytanie:

PYTANIE 1. Dla jakich wartości rzeczywistych $a > 0$ ciąg określony wzorem

$$a_1 = a \quad \text{i} \quad a_{n+1} = a^{a_n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny?

Odpowiedź na to pytanie wymaga znajomości liczby e ($\approx 2{,}718281$) (zob. [1]) i jest ona następująca: wyżej określony ciąg jest zbieżny dla $0{,}065988 \approx \mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq$ $\leq a \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} \approx 1{,}444667$. Szczegóły rozwiązania można znaleźć w [2, str. 82–83] oraz [3, Prob. 30]. Jeszcze dalej idącą analizę tego typu ciągów zawiera praca [4, zad. 2.5.40]. Inne podejście do badania zbieżności ciągu, gdy nie potrafimy łatwo obliczyć jego granicy, łączy się z nazwiskiem francuskiego matematyka L.A. Cauchy'ego (1789–1857), który podał następujące twierdzenie [1]:

TWIERDZENIE 2. Ciąg $\{a_n\}$ liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_k\ \forall_{m,n\geq k}\quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

(inaczej mówiąc: gdy końcówka ciągu może mieć dowolnie małą średnicę).

Kryterium to, niezależnie od Cauchy'ego, podał też czeski matematyk B. Bolzano (1781–1848). Tak na marginesie, nietrywialny warunek z Twierdzenia 2 za sprawą polskiego matematyka S. Banacha (1892–1945) zrobił w matematyce oszałamiającą karierę, ale to temat na całkiem inne opowiadanie.

Część II

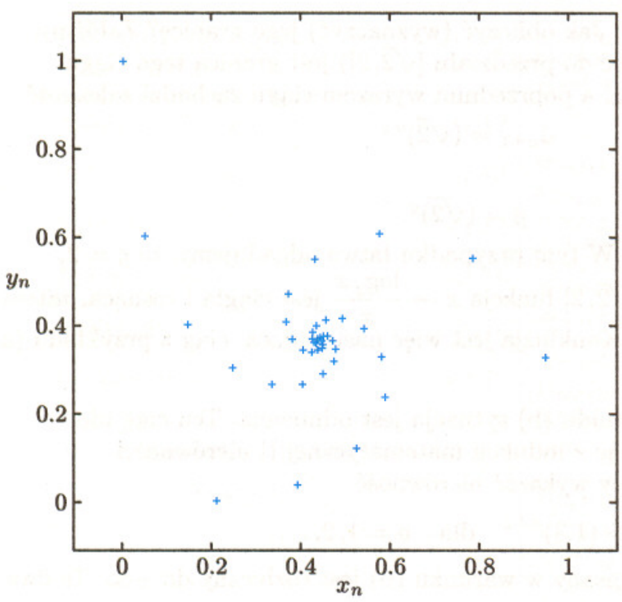
Przenieśmy teraz nasze rozważania ze zbioru liczb rzeczywistych (z prostej liczbowej) do zbioru liczb zespolonych, czyli na płaszczyznę. Chcąc zobaczyć, jakie „niespodzianki" tu na nas czekają, zbadamy zbieżność „najbardziej" zespolonego ciągu:

$$\text{(c)}\qquad i,\ i^i,\ i^{i^i}, \ldots,$$

Aby zadanie miało sens, ograniczymy się do tzw. wartości głównej (potęgowanie w dziedzinie zespolonej jest bardziej skomplikowane niż w dziedzinie rzeczywistej i często prowadzi do funkcji wielowartościowych).

gdzie i oznacza jednostkę urojoną, czyli liczbę zespoloną spełniającą równanie $i^2 = -1$. Nie wdając się w techniczne zawiłości, skorzystajmy ze znanego wzoru $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Otrzymujemy wtedy $e^{i\pi/2} = i$, skąd $i(2) = i^i = e^{-\pi/2} = 0{,}207879$. Bierzemy kalkulator i obliczamy dalej

$$i(3) = i^{i^i} \approx i^{0{,}207879} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{0{,}207879} = e^{i\cdot 0{,}326535} =$$
$$= \cos 0{,}326535 + i \sin 0{,}326535 = 0{,}947159 + i\cdot 0{,}320764.$$



Wykonując analogiczne obliczenia, otrzymujemy następujące przybliżone wartości:

$$\begin{cases} i(4) \approx 0{,}050092 + i\cdot 0{,}602116, \\ i(5) \approx 0{,}387166 + i\cdot 0{,}305270, \\ i(6) \approx 0{,}142561 + i\cdot 0{,}400466, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i(1000) \approx 0{,}438282 + i\cdot 0{,}360592. \end{cases}$$

Ponieważ o liczbach zespolonych nie możemy powiedzieć, która jest mniejsza, a która większa, więc nie możemy bezpośrednio stosować Twierdzenia 1. Przypatrywanie się częściom rzeczywistym i częściom urojonym tych liczb też, niestety, nie wskazuje na jakąś monotoniczną regularność. Zatem tym sposobem (tymi środkami) nie zdecydujemy, czy badany ciąg jest zbieżny. Aby wyjść z tej nieprzyjemnej sytuacji, wykonajmy symulację komputerową, zaznaczając na płaszczyźnie zespolonej położenia początkowych wyrazów ciągu (c) (rysunek, [5]).

Widzimy, że wyrazy tego ciągu, układające się wzdłuż trzech spiralnych ramion, koncentrują się wokół punktu, który jest dobrze przybliżany przez $i(1000)$. Mamy więc komputerową sugestię: ciąg z przykładu (c) jest zbieżny. Korzystając z takiego założenia, spróbujemy wyznaczyć jego granicę z. Postąpimy jak w części I. Ponieważ między następnym a poprzednim wyrazem rozpatrywanego ciągu zachodzi zależność

$$c_{n+1} = i^{c_n},$$

więc musi zachodzić też równość

$$z = i^z,$$

gdzie $z = x + iy$. Jednak rutynowe obliczenia (porównanie części rzeczywistych oraz części urojonych) prowadzą do układu równań

LITERATURA

[1] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1973.

[2] W. Żakowski, *Matematyka, ćwiczenia problemowe dla politechnik*, WNT, Warszawa 1987.

[3] *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Amer. Math. Monthly 64 (1957), no 7, part 2 (tłumaczenie rosyjskie: Izd. „Mir", Moskwa 1977).

[4] W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, cz. I: liczby rzeczywiste, ciągi, szeregi liczbowe*, Wyd. UMCS, Lublin 1996.

[5] G.J. Parker, S. Abbott, *Complex power iterations*, Math. Gaz. 81 (1997), 431–434.

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-y\pi/2}\cos\left(x\dfrac{\pi}{2}\right), \\ y = \mathrm{e}^{-y\pi/2}\sin\left(x\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

którego bezpośrednie rozwiązanie bez użycia komputera jest trudne. Komputerowa analiza tego układu lub otrzymanego z niego równania przestępnego

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$$

przekonuje nas, że granicę ciągu (c) rzeczywiście zadowalająco przybliża wartość $i(1000)$.

Interesująca może być odpowiedź na ogólniejsze pytanie:

PYTANIE 2. Dla jakich liczb zespolonych ciąg określony wzorem

(1) $a_1 = z,\ a_{n+1} = z^{a_n},\ n = 1, 2, \ldots,$

(2) $a_1 = z,\ a_2 = z^i,\ a_3 = z^{i^i},\ \ldots$

jest zbieżny? Warto naszkicować ten zbiór na płaszczyźnie zespolonej.

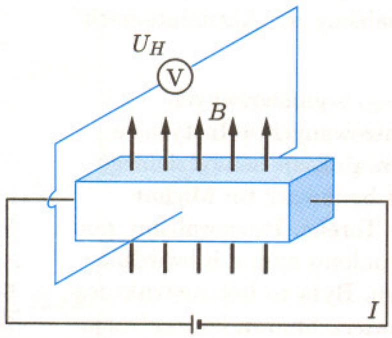
Wydaje się, że w rozwiązaniu tego typu zagadnień bardzo pomocne mogą być symulacje komputerowe. Może prowadzą one do fraktali... Wszystkim, którzy podejmą się pracy nad tymi problemami, życzę sukcesu!

Kwantowy efekt Halla

Michał KORCH

Jest to sprawozdanie z Warsztatów Fizyki Ciała Stałego organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, spisane przez jednego z uczestników.

W 1879 roku Edwin Robert Hall odkrył, że jeśli przewodnik, przez który płynie prąd elektryczny o natężeniu I, umieścimy w polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłej do kierunku prądu, to w przewodniku powstaje poprzeczne napięcie elektryczne U_H. Napięcie to można zmierzyć, podłączając woltomierz do bocznych kontaktów tak, jak to pokazano na rysunku 1.

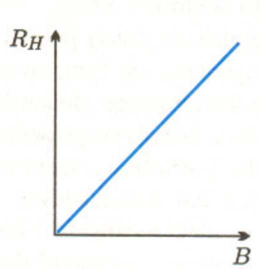


Rys. 1. Efekt Halla.

Zjawisko to jest wynikiem działania siły Lorentza na swobodne nośniki prądu. Jeśli tymi nośnikami są elektrony, to siła Lorentza odchyli je w kierunku jednej ze ścianek, pozostawiając przy przeciwnej ściance nadmiar ładunku dodatniego. W rezultacie w przewodniku powstanie poprzeczne pole elektryczne, działające na elektrony siłą przeciwną do siły Lorentza i zapobiegające dalszemu rozsuwaniu ładunków. Napięcie poprzeczne U_H jest iloczynem tego pola i szerokości przewodnika. To klasyczne zjawisko zostało nazwane, na cześć odkrywcy, efektem Halla. Jest ono bardzo ważne w fizyce metali i półprzewodników, ponieważ pozwala na określenie znaku i koncentracji nośników prądu. Dzieląc napięcie poprzeczne U_H przez natężenie I prądu płynącego przez przewodnik, otrzymujemy tzw. opór Halla

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{e \cdot n \cdot d}, \tag{1}$$

gdzie e jest ładunkiem nośnika prądu, n – liczbą nośników w jednostce objętości przewodnika, a d – grubością przewodnika. Ze wzoru (1) wynika, że opór R_H jest liniową funkcją indukcji pola magnetycznego. Zauważmy jeszcze, że opór Halla jest odwrotnie proporcjonalny do grubości przewodnika.



Rys. 2. Zależność oporu Halla od indukcji pola magnetycznego w klasycznym efekcie Halla.

Czy to oznacza, że może on być dowolnie duży dla odpowiednio cienkiej warstwy przewodzącej? Oczywiście nie, naturalną granicę ścieniania stanowi chociażby rozmiar pojedynczej komórki elementarnej sieci krystalicznej materiału przewodnika. Co więcej, należy podkreślić, że elektrony mają również naturę falową i do pełnego ich opisu konieczne jest użycie mechaniki kwantowej. W jej ramach pokazano, że klasyczny opis załamuje się, gdy grubość warstwy d staje się porównywalna z długością fali elektronu. Wtedy energia kinetyczna ruchu