4/01 (40)

Γ $\lim\limits_{n\to\infty}$ atias

DLACZEGO? (3)

Aby przeanalizować zachowanie ciągu, podanego w poprzednim Γ-limatiasie, zacznijmy od analizy ciągów skonstruowanych podobnie, ale znacznie prościej.

Mam tu na myśli ciągi związane z problemem Collatza znanym potocznie jako problem $3n+1$. Znacie ten problem? Jak znacie, to poczytajcie.

Niech funkcja g będzie zdefiniowana jak następuje. Aby otrzymać liczbę $g(n)$, dzielimy liczbę $3n+1$ przez największą potęgę dwójki, przez jaką się da. Do dziś nierozstrzygnięta hipoteza przewiduje, że zaczynając od dowolnej liczby n i iterując funkcję g, zawsze dojdziemy do jedynki. Innymi słowy, hipoteza ta głosi, że ciąg iteracji nie trafi na cykl złożony z liczb większych od 1 ani nie ucieknie do nieskończoności.

Hipoteza taka na pewno nie zachodzi dla ciągów będących iteracjami funkcji f opisanej przed dwoma miesiącami, gdyż znajdujemy 10-elementowy cykl jej iteracji: 47, 541, 1037, 5963, 2743, 701, 4031, 46357, 4231, 331, 47.

Trudno wyrobić sobie intuicyjny pogląd na istnienie lub nieistnienie takich cykli. Ale dobra intuicja może pomóc nam ocenić, czy ciąg iteracji ma tendencję rosnącą czy malejącą.

Przyjrzyjmy się funkcji g związanej z ciągami „$3n+1$". Interesuje nas zmiana wielkości liczby po wykonaniu operacji g. Co robi ta funkcja z liczbą n? Po pierwsze mnoży ją przez 3. Tym, że dodaje 1, nie będziemy sobie zawracać głowy, jeśli interesuje nas przypadek dużych liczb n. Jeśli n jest wartością funkcji g, a tak jest, kiedy analizujemy wielokrotne iteracje funkcji g, to jest liczbą nieparzystą, zatem liczba $3n+1$ jest parzysta. Funkcja g na pewno podzieli ją przez 2. Nie mamy teraz najmniejszych przesłanek, aby rozstrzygać co do parzystości liczby $(3n+1)/2$, możemy więc przyjąć (intuicja!), że będzie ona parzysta z prawdopodobieństwem 1/2. Wtedy funkcja g podzieli ją przez 2 i otrzymamy znowu liczbę parzystą z prawdopodobieństwem 1/2, więc kolejne (trzecie) dzielenie przez 2 będzie miało miejsce w 1/4 przypadków. A z prawdopodobieństwem 1/8 będzie miało miejsce także czwarte dzielenie przez 2. Oczywiście słowu „prawdopodobieństwo" nie nadajemy tu ścisłego sensu, więc proszę nie pytać o przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Podsumujmy: funkcja g mnoży nieparzysty argument przez 3, na pewno dzieli wynik przez 2, w 1/2 przypadków jeszcze raz przez 2, w 1/4 jeszcze raz itd. Oczekujemy więc średnio
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2$$
dzieleń przez 2. Oczekiwać należy, że funkcja g mnoży (średnio!) argument przez 3/4, czyli ma dosyć wyraźną tendencję malejącą. Ma też, oczywiście, losowe kaprysy, które jednak na dłuższą metę muszą zostać przezwyciężone przez tendencję malejącą.

Czego więc oczekujemy po 1000 iteracji funkcji g? Że przemnoży argument przez
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1000}\approx 1{,}1515\cdot 10^{-125},$$
czyli że skróci go o około 125 cyfr – statystycznie ubywa jedna cyfra co 8 iteracji.

Przewidywania te dobrze zgadzają się z doświadczeniem. Wylosowałem 1000 liczb nieparzystych z przedziału $(10^{200};\,1{,}001\cdot 10^{200})$, a następnie do każdej z nich 1000 razy zastosowałem funkcję g. Najmniejsza z otrzymanych liczb miała 25 cyfr (kolejna 36), a największa 118. Po odrzuceniu 5% najmniejszych i 5% największych pozostałe mieściły się w przedziale 53–97 cyfr. Połowa liczb miała 67–85 cyfr, a średnia geometryczna wszystkich liczb wynosiła $1{,}57\cdot 10^{75}$.

Wystarczy więc analogiczne rozumowanie zastosować do funkcji f.

Wartości funkcji f są niepodzielne przez 2, 3, 5 i 7. Rozważmy więc liczbę n niepodzielną przez żadną z powyższych liczb. Wówczas liczba $23n+1$ na pewno dzieli się przez 2, przez 3 dzieli się z prawdopodobieństwem 1/2, przez 5 z 1/4, przez 7 z 1/6. Weźmy pod uwagę siódemkę. Liczba $23n+1$ dzieli się przez 7 z prawdopodobieństwem 1/6, po raz drugi podzieli się przez 7 z prawdopodobieństwem 1/42, po raz trzeci z 1/294 itd. Średnio oczekujemy podzielności przez 7 w potędze
$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}+\frac{1}{343}+\ldots\right)=\frac{7}{36}.$$
Podobnie oczekujemy, że operacja f wykona 5/16 dzielenia przez 5, 3/4 dzielenia przez 3 i 2 dzielenia przez 2.

Należy więc oczekiwać, że wykonanie operacji f średnio mnoży argument przez
$$\frac{23}{2^2\cdot 3^{3/4}\cdot 5^{5/16}\cdot 7^{7/36}}\approx 1{,}0449,$$
co oznacza tendencję do przyrostu jednej cyfry co około 52,427 iteracji funkcji f. Po 15,6 milionach iteracji ten efekt powinien więc dać przyrost rzędu 300 tysięcy cyfr!!! Powinien więc zdominować wszelkie lokalne wahania. Po wielu milionach iteracji ciąg, o ile od razu nie wpadł w jakiś cykl, powinien zawędrować w setki tysięcy cyfr!!!

DLACZEGO więc tego nie zrobił?

DLACZEGO?

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (24′)

Wyjaśnienie oszustwa (24):

Nie jest prawdą, że sześcianiki w przeciwległych narożach mają ten sam kolor – mają różne kolory! Tak więc usuwając przeciwległe naroża, pozostawiamy 255 sześcianików białych i tyleż czarnych. Wnikliwy Czytelnik bez trudu znajdzie sposób podziału danej figury na prostopadłościany $1\times 1\times 2$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl