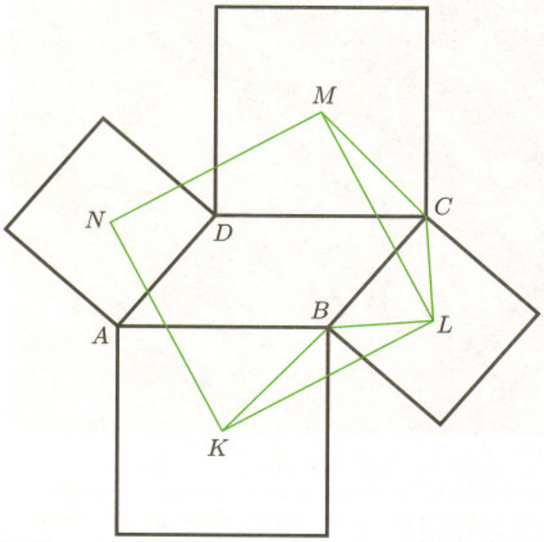
Obrót na płaszczyźnie

Piotr SULICH

Jest to skrót jednej z dwóch prac nagrodzonych srebrnymi medalami na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2000 r. Kolejną opublikujemy w następnym numerze.

Obrót na płaszczyźnie, który jest przecież elementarnym przekształceniem, można wykorzystać do rozwiązywania całkiem poważnych problemów. O tym właśnie traktowała moja praca. W pierwszej jej części zająłem się zastosowaniem obrotu w geometrii syntetycznej, dowodząc kilku twierdzeń dotyczących nadbudowywania figur płaskich, w tym znane twierdzenie Van Aubela. W drugiej części pokazałem zastosowanie obrotu w geometrii analitycznej, przy udowadnianiu własności składania obrotów oraz do rozwiązywania zadań. Poniżej prezentuję skrót części pierwszej, złożony z pięciu twierdzeń o nadbudowywaniu figur kwadratami.



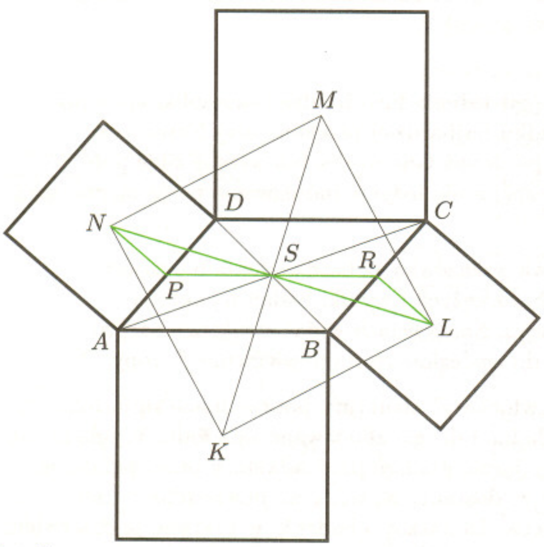
Rys. 1

Twierdzenie 1. Środki kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku są wierzchołkami kwadratu.

Dowód. Przez A, B, C i D oznaczmy wierzchołki rozważanego równoległoboku (rys. 1). Przez K, L, M i N oznaczmy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach AB, BC, CD oraz AD. Mamy: $\triangle KBL \equiv \triangle MCL$ (cecha BKB; $CL = BL$, $KB = MC$, $\angle KBL = \angle MCL$) oraz $\angle BLC = 90°$ (kąt między przekątnymi kwadratu). Z tych dwóch faktów wynika, że

$$O_L^{90°}(\triangle MCL) = \triangle KBL.$$

A zatem $ML = KL$ oraz ML jest prostopadłe do KL. Widzimy zatem, że dowolne dwa kolejne boki czworokąta $KLMN$ są równe i prostopadłe. Jest to więc kwadrat.

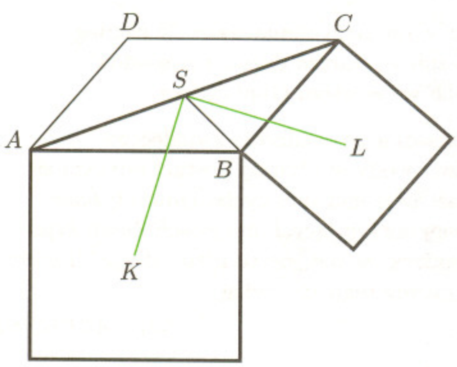


Rys. 2

Twierdzenie 2. Przekątne kwadratu, powstałego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku, przecinają się w punkcie przecięcia jego przekątnych.

Dowód. Przez A, B, C i D oznaczmy wierzchołki rozważanego równoległoboku (rys. 2). Przez K, L, M i N oznaczmy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach AB, BC, CD oraz AD. Jak wiemy, środkiem symetrii równoległoboku jest punkt przecięcia jego przekątnych. Oznaczmy ten punkt dla równoległoboku $ABCD$ przez S. Niech punkty P i R będą środkami odpowiednio boków AD i BC tego równoległoboku. Odcinki NP i LR są równe i odpowiednio prostopadłe do odcinków AD i BC, również odcinki PS i RS są równe. Ponadto $\angle NPD = \angle LRC = 90°$ oraz $\angle DPS = \angle BRS$, bo trójkąt BRS jest obrazem trójkąta DPS w symetrii środkowej względem S: $S_S(\triangle DPS) = \triangle BRS$, skąd wynika, że kąty NPS i LRS są równe. A zatem $\triangle NPS \equiv \triangle LRS$ na podstawie cechy BKB ($PS = RS$, $NP = LR$, $\angle NPS = \angle LRS$).

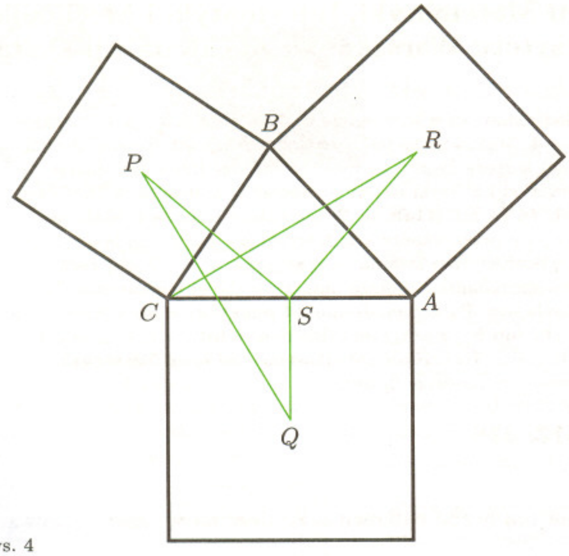
Zauważmy, że z równości $S_S(\triangle NPS) = \triangle LRS$, wynika, że S należy do odcinka NL. Analogicznie (przy użyciu tego samego obrotu) otrzymujemy, że S należy do odcinka KM. Obie przekątne kwadratu $KLMN$ przechodzą więc przez punkt S, czyli przecinają się w punkcie przecięcia przekątnych równoległoboku.



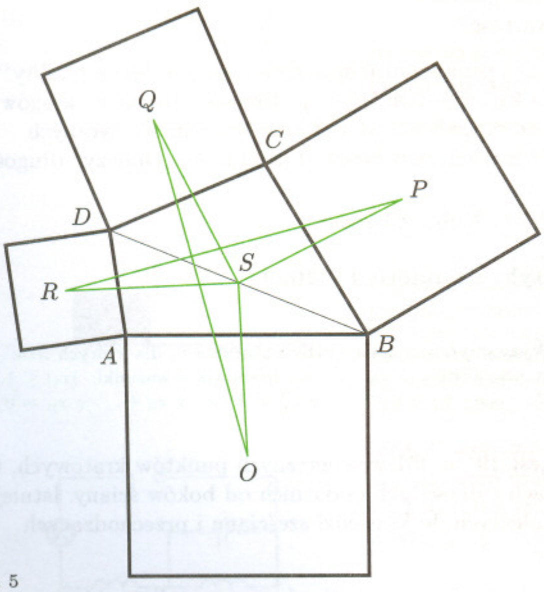
Rys. 3

Twierdzenie 3. Jeżeli na dowolnych dwóch bokach trójkąta nadbudujemy kwadraty, to odcinki łączące środki tych kwadratów ze środkiem trzeciego boku trójkąta są równe i prostopadłe.

Dowód. Nadbudujmy kwadraty na bokach AB i BC, ich środki oznaczmy odpowiednio przez K i L (rys. 3). Środek odcinka CA oznaczmy przez S. Niech $S_S(B) = D$. Wtedy $ABCD$ jest równoległobokiem. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Więc i przekątne kwadratu utworzonego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach



Rys. 4



Rys. 5

tego równoległoboku przecinają się w punkcie S (na mocy twierdzenia 2). Z tego, że przekątne kwadratu są równe i się połowią, wynika, iż $SK = SL$. Z tego, że przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym, otrzymujemy, iż SK jest prostopadłe do SL, bo SK i SL zawierają się w przekątnych kwadratu utworzonego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku.

Twierdzenie 4. Odcinek łączący środki kwadratów, nadbudowanych na dwóch dowolnych bokach trójkąta, jest przystający i prostopadły do odcinka łączącego środek kwadratu nadbudowanego na trzecim boku z wierzchołkiem nie należącym do tego kwadratu.

Dowód. Przez A, B i C oznaczmy wierzchołki rozważanego trójkąta (rys. 4). Niech P, Q i R będą środkami kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach BC, CA oraz AB. Przez S oznaczmy środek boku CA. Na mocy twierdzenia 3 mamy, że $RS = SP$ oraz $RS \perp SP$. Zauważmy że $SQ = SC$ oraz $SQ \perp SC$. Więc $O_S^{90^\circ}(\triangle RCS) = \triangle QPS$. Wynika stąd, że $RC = QP$ oraz $RC \perp QP$. Analogicznie (rozważając obroty względem środków odcinków AB i BC) otrzymamy, że $AP = RQ$, $AP \perp RQ$ oraz $BQ = PR$, $BQ \perp PR$.

Twierdzenie 5 (Van Aubel). Odcinki łączące środki kwadratów nadbudowanych na przeciwległych bokach czworokąta wypukłego są równe i prostopadłe.

Dowód. Oznaczmy wierzchołki rozważanego czworokąta wypukłego przez A, B, C i D (rys. 5). Przez O, P, Q i R oznaczmy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach AB, BC, CD i DA czworokąta $ABCD$. Przez S oznaczmy punkt będący środkiem odcinka BD.

Na mocy twierdzenia 3 dla trójkąta ABD otrzymujemy, $OS = RS$ i $OS \perp RS$, a dla trójkąta BCD otrzymujemy, $QS = PS$ i $QS \perp PS$. Zatem $O_S^{90^\circ}(\triangle SPR) = \triangle SQO$. Mamy więc: $PR = QO$ oraz $PR \perp QO$.

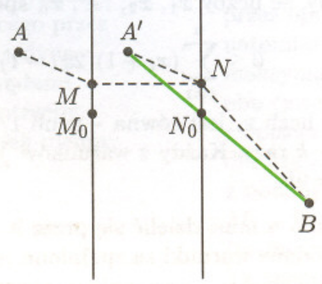
Rozwiązanie zadania F 543.
Liczba obrotów koła na drodze l wynosi

$$\text{latem}\quad n_1 = \frac{l}{2\pi r_0(1+\alpha t_1)}, \quad \text{a zimą}\quad n_2 = \frac{l}{2\pi r_0(1+\alpha t_2)}.$$

Zatem różnica liczby obrotów wynosi

$$n_2 - n_1 = \frac{l}{2\pi r_0}\left(\frac{1}{1+\alpha t_2} - \frac{1}{1+\alpha t_1}\right) \approx 9{,}5 \text{ obrotów}.$$

Rozwiązanie zadania M 946.
Niech A' powstaje przez przesunięcie punktu A o wektor prostopadły do rzeki, który ma długość równą szerokości rzeki. Jeśli zbudujemy most MN, to aby dostać się od A do B, będziemy musieli pokonać drogę $AMNB$, która ma długość a + długość łamanej $A'NB$. Długość łamanej $A'NB$ jest najmniejsza, jeśli N leży na odcinku $A'B$, czyli most należy zbudować od M_0 do N_0 (rysunek obok).



Rozwiązanie zadania F 544.
Przy prawidłowej pracy zegara wahadło wykonuje N wahań na dobę

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Przy zmianie temperatury długość wahadła wynosi $l_1 = l\,(1 + \alpha(t_2 - t_1))$. Dlatego zmieni się też i okres wahadła, o wielkość

$$\Delta T = T_1 - T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l_1}{g}} - \sqrt{\frac{l}{g}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{g}\,\frac{l_1 - l}{\sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Uwzględniając, że $l_1 \approx l$, mamy

$$\Delta T \approx \frac{\pi}{g}\,\frac{\alpha l(t_2 - t_1)}{\sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Po upływie doby zegar opóźni się o

$$t = N\Delta T \approx 12 \cdot 3600\alpha(t_2 - t_1) \approx 13 \text{ s}.$$