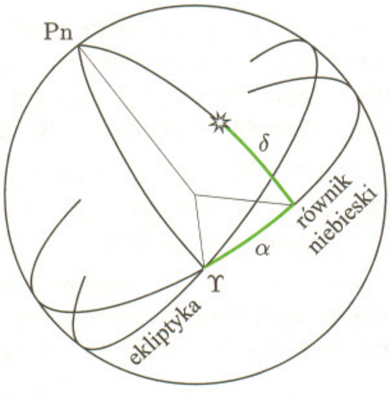
Jak dokładny jest zegar słoneczny?

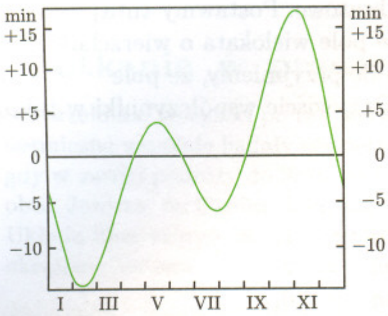
Wydaje się, że wśród ludzi panuje przekonanie o tzw. astronomicznej dokładności przewidywania zjawisk niebieskich. Przecież z dokładnością nie gorszą niż co do minuty potrafimy obliczyć momenty wschodu i zachodu dowolnego ciała, początku i końca zaćmień, początków pór roku (choć tego akurat nie sposób sprawdzić) itd. Zapewne więc zegar słoneczny, gdyby go tylko precyzyjnie wykonać, również mógłby być przyrządem bardzo dokładnym. Konstrukcja takiego zegara sama się narzuca. Pręt rzucający cień należy skierować w stronę północnego bieguna nieba (w przybliżeniu w stronę Gwiazdy Polarnej), a na prostopadłej do niego tarczy należy wykreślić podziałkę: skoro obrót Ziemi (nieba) trwa 24 godziny, to np. linie godzinowe powinny być co 15°. I to wszystko. Podziałka powinna być wprawdzie wykreślona po obu stronach tarczy (bo wiosną i latem Słońce będzie oświetlać ją z jednej strony, a jesienią i zimą z drugiej), ale to szczegół techniczny.

Najczęściej widuje się jednak zegary słoneczne o tarczy poziomej. Można udowodnić, że kierunek cienia pręta (skierowanego w biegun nieba) na takiej tarczy nie zależy wprawdzie od daty, ale kąty między liniami godzinowymi nie są równe. Wszystkie te kąty można oczywiście z góry obliczyć, ale można też linie godzinowe narysować „z natury”, mianowicie pewnego pogodnego dnia zaznaczamy co godzinę kierunek cienia i sprawa załatwiona. I tu właśnie pojawia się pytanie: jak dokładna będzie taka podziałka? Pomijamy oczywiście takie rzeczy jak niedokładność rysunku czy nieostrość cienia pręta. W pierwszym odruchu każdy odpowie, że przecież Ziemia obraca się tak jednostajnie, że do zaobserwowania nierównomierności trzeba mocno zaawansowanych środków technicznych. Nie zapominajmy jednak, że kierunek cienia pręta zależy od położenia Słońca, które porusza się po niebie. Gdyby poruszało się jednostajnie i w dodatku po równiku niebieskim, to wszystko byłoby w porządku, tymczasem...



Rys. 1. Współrzędne gwiazdy: α – rektascensja, δ – deklinacja, Υ – punkt równonocy wiosennej.

Przede wszystkim Słońce obiega niebo nie po równiku niebieskim, lecz po tzw. ekliptyce, tj. po kole, którego płaszczyzna leży w płaszczyźnie ziemskiej orbity. Gdyby nawet poruszało się jednostajnie po ekliptyce, to jednakowym zmianom jego położenia na ekliptyce odpowiadałyby niejednakowe zmiany jego rektascensji – współrzędnej liczonej wzdłuż równika i będącej niebieskim odpowiednikiem długości geograficznej (rys. 1). Jest jednak gorzej, bo sam ruch Słońca po ekliptyce, jako skutek niejednostajnego ruchu Ziemi po eliptycznej orbicie, jest też niejednostajny. W rezultacie Słońce prawdziwe (a więc i cień pręta) jest marną wskazówką. Fakt ten opisuje różnica rektascensji fikcyjnego Słońca „średniego” (właśnie poruszającego się z definicji jednostajnie po równiku) i prawdziwego, zwana nieco dziwacznie równaniem czasu.



Rys. 2. Równanie czasu.

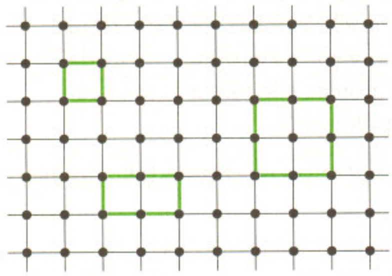
Równanie czasu można na każdy dzień obliczyć, jest też stablicowane w rocznikach astronomicznych (rys. 2). Przyjmuje ono wartość zerową tylko cztery razy w roku: 16 IV, 14 VI, 1 IX i 24 XII – wtedy słońce średnie i prawdziwe pokrywają się. Wykreślenie podziałki zegara w tych dniach zagwarantuje nam, że będzie to podziałka „średnia”, najodpowiedniejsza na cały rok. Wartości maksymalne (wynoszące około kwadransa) równanie czasu osiąga dwa razy w roku (12 II i 3 XI). Tak więc zegary słoneczne „chodzą” dość kiepsko, niekiedy z błędem wynoszącym nawet kwadrans, nic więc dziwnego, że już od dawna służą jedynie do ozdoby parków i placów.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Hipoteza, twierdzenie, dowód, kontrprzykład

Marek KORDOS

Tytuł tej notatki to żart opisujący tok pracy matematyka. Oczywiście w rzeczywistości raczej rzadko się zdarza, aby matematyk jakąś hipotezę (a więc przypuszczenie) ogłaszał jako twierdzenie (a więc sąd prawdziwy), a potem dopiero znajdował jego dowód, by po opublikowaniu go znaleźć kontrprzykład (czyli przykład tę hipotezę obalający, a więc przeczący twierdzeniu). Zazwyczaj mając hipotezę, poszukujemy albo dowodu, albo kontrprzykładu. I w zasadzie zawsze (wcześniej lub później) znajduje się albo jedno, albo drugie, a bywa i tak, że dowodzimy, iż hipoteza rozstrzygnąć się nigdy nie da. Oto dwa przykłady, na których można to sobie przećwiczyć.



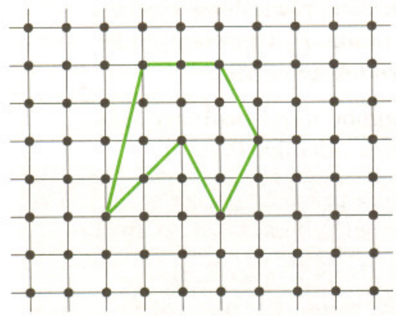
Rys. 1

Wielokąty na kracie

Pewnego dnia pod koniec XIX wieku matematyk (austriacki, ale przez przeważającą część życia pracujący w czeskiej Pradze) Georg Pick wpadł na pomysł, że pole każdego wielokąta (narysowanego w układzie współrzędnych o wierzchołkach w punktach kratowych (czyli o obu współrzędnych całkowitych) da się opisać za pomocą wyrażenia stopnia pierwszego względem liczby W punktów kratowych leżących wewnątrz tego wielokąta i względem liczby B punktów kratowych leżących na brzegu tego wielokąta. A zatem pole P dane jest wzorem

$$(\star) \qquad kW + lB + m,$$

dla pewnych stałych k, l, m.



Rys. 2. $W = 6$, $B = 8$, $P = 9$.

Gdyby tak rzeczywiście było, to stałe te można bez trudu znaleźć: trzy wielokąty przedstawione na rysunku 1 dają układ trzech równań

$$\begin{cases} k\cdot 0 + l\cdot 4 + m = 1,\\ k\cdot 0 + l\cdot 6 + m = 2,\\ k\cdot 1 + l\cdot 8 + m = 4,\end{cases}$$

mający rozwiązanie $k = 1$, $l = \frac{1}{2}$, $m = -1$. Zatem wzór miałby (ewentualnie) postać

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1.$$

To była hipoteza Picka. Mógł dla niej szukać dowodu, albo kontrprzykładu. Wybrał to pierwsze i udało mu się: w 1899 ukazała się praca *Geometrisches zur Zahlenlehre*, w której ten dowód się znajdował. Nie będę go tu przedstawiał, tylko zaproponuję wykonanie go samemu lub znalezienie go w jednym ze wskazanych obok miejsc (bądź też w dowolnym innym miejscu).

Kolejność według łatwości dostępu; przy okazji: to, co najłatwiej znaleźć, jest najbardziej szkicowe – dokładny dowód jest podany w ostatniej notce.

- H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, np. WSiP 1989, rozdz. IV, pkt. 107;
- H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, np. 1967, rozdz. 13, par. 13.5;
- *Delta* 4/1993, str. 11.

Tym, których gniewa, iż nie są to odsyłacze internetowe, przypominam, że wszystko, co mogą znaleźć w internecie, jest mniej lub bardziej starannie przepisane przez webmasterów (i współpracujących z nimi maszynistów) ze źródeł tradycyjnych.

Obejrzyjmy teraz podobną hipotezę na podobny temat. Punktami kratowymi niekoniecznie muszą być punkty siatki kwadratowej. Łatwo wyobrazić sobie