Konkurs rozwiązywania zadań – Festiwal Nauki 2000

24 września 2000 r. w ramach Festiwalu Nauki odbył się konkurs rozwiązywania zadań matematycznych. Część zadań została zaproponowana przez

Łukasza WIECHECKIEGO

(to ja), a część przez uczestników konkursu. Na rozwiązanie każdego zadania było przewidziane około 5 min. Wszystkie zadania zostały rozwiązane, wszystkie ciastka zjedzone, a i herbatki każdy mógł się napić do woli. Obok przedstawiamy treść zadań, które pojawiły się na tablicy.

Z. 1. Podać przykład trójkąta, który można podzielić na 5 przystających trójkątów.

Z. 2. Dla dowolnego naturalnego n znaleźć $2n+1$ różnych liczb naturalnych tworzących ciąg arytmetyczny, których iloczyn jest pełnym kwadratem.

Z. 3. Na początku (po lewej stronie) prostokątnej planszy 1×2001 leżą trzy guziki. Boguś i Goguś grają w grę, w której na zmianę wykonują ruch polegający na przesunięciu jednego z guzików o pewną dodatnią liczbę pól w prawo. Przegrywa ten, który nie może wykonać żadnego posunięcia. Stwierdzić, kto ma strategię wygrywającą: zaczynający czy ten drugi.

Z. 4. Dla pewnej liczby naturalnej n liczby 2^n i 5^n zaczynają się (patrząc od lewej) tą samą cyfrą k. Znaleźć k.

Z. 5. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC. Wiadomo, że $AB = CH$. Znaleźć $\angle ACB$.

Z. 6. Czy równanie $x^x + y^y = z^z$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych?

Z. 7. Udowodnić, że nie istnieją dwa nieprzystające trójkąty prostokątne o tym samym polu i obwodzie.

Z. 8. Udowodnić, że jeśli a^5 i a^7 są liczbami naturalnymi, to a również.

Z. 9. Jaka jest minimalna liczba prostokątów a) 3×4, b) 3×5, którymi można pokryć planszę 13×13. (Prostokąty muszą być umieszczone wzdłuż linii podziału planszy na pola 1×1 i mogą nachodzić na siebie.)

Szkice rozwiązań

R. 1. Trójkąt prostokątny o stosunku przyprostokątnych równym 2, porównaj rysunek 1 na str. 3

R. 2. $A, 2A, 3A, \ldots, (2n+1)A$, gdzie $A = (2n+1)!$.

R. 3. Zaczynający. Pierwszy ruch powinien polegać na przesunięciu jednego z guzików na ostatnie pole. Kolejne ruchy powinny być „kopiami” ruchów przeciwnika.

R. 4. Niech $2^n = k \cdot 10^a + b$ i $5^n = k \cdot 10^c + d$, gdzie $b < 10^a$ i $d < 10^c$. Z $2^n \cdot 5^n = 10^n$ wynika, że $k^2 \cdot 10^{a+c} < 10^n < (k+1)^2 \cdot 10^{a+c}$ i następnie $k^2 < 10 < (k+1)^2$, czyli $k = 3$. Sytuacja taka ma miejsce np. dla $n = 5$.

R. 5. Niech D będzie rzutem punktu B na bok AC. Wtedy trójkąty ABD i HCD są przystające, gdyż mają równe kąty i długości przeciwprostokątnej. Wynika stąd, że $AD = DH$, czyli trójkąt AHD jest równoramienny i prostokątny. Stąd $\angle HAD = 45°$ oraz $\angle ACB = 90° - \angle HAD = 45°$.

R. 6. Nie. Mielibyśmy wtedy $x \le z-1$, $y \le z-1$, czyli $2 \cdot (z-1)^{z-1} \ge z^z$, co jest niemożliwe dla $z \in \mathbb{N}$.

R. 7. Jeśli l jest obwodem trójkąta prostokątnego, P – jego polem, zaś c – przeciwprostokątną, to łatwo sprawdzić, że $c = \dfrac{l^2 - 4P}{2l}$.

R. 8. $a^2 = a^7 : a^5$ jest wtedy wymierna, $a = a^5 : a^4$ również. Liczba wymierna, której pewna potęga jest całkowita, jest również całkowita.

R. 9. Na rysunku 2 na str. 14 pokazano planszę wraz z zaznaczonymi 16 polami, które mają tę własność, że dowolny prostokąt 3×4 złożony z całych pól planszy pokrywa co najwyżej jedno z nich. Wynika stąd, że prostokątów musi być co najmniej 16. Odpowiednia plansza z 13 polami dla przypadku b) przedstawiona jest na rysunku 3 na str. 16. Wykazanie, że pokrycie szesnastoma prostokątami dla przypadku a) i trzynastoma dla przypadku b) da się zrealizować, pozostawiamy Czytelnikowi.

Rozwiązanie zadania M 947.
Dokonujemy kolejno trzech odbić tak jak na rysunku poniżej. Widać, że łamana $DCB'A''D'''$ ma długość równą obwodowi czworokąta $ABCD$, zaś $|DD'''| = 2\sqrt{2}$. Stąd teza.