Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2001

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z matematyki nr 417, 418

Redaguje Marcin E. KUCZMA

417. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Znaleźć największą możliwą wartość sumy $\sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$ dla permutacji π zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Ile jest permutacji wyznaczających tę maksymalną wartość?

418. Dany jest okrąg Ω o środku O i promieniu r oraz dwa ustalone różne punkty A i B na tym okręgu, w odległości kątowej $|\angle AOB| = \varphi$. Rozważamy pary okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu Ω w punktach A i B oraz wzajemnie stycznych zewnętrznie. Punkty ich styczności zewnętrznej tworzą łuk krzywej. Obliczyć długość tego łuku.

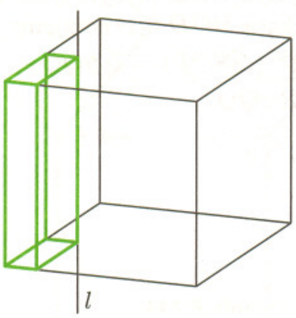
Zadanie **418** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2000

Przypominamy treść zadań:

409. Z dwóch tysięcy klocków o rozmiarach $2 \times 2 \times 1$ zbudowano sześcian o krawędzi długości 20. Dowieść, że istnieje prosta przecinająca wnętrze tego sześcianu, ale nie przecinająca wnętrza żadnego klocka.

410. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające warunki: $|x_i| \le 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n/3$.

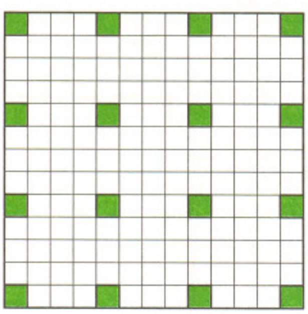


409. Na każdej ścianie sześcianu jest $19^2 = 361$ wewnętrznych punktów kratowych, tzn. punktów położonych w odległościach całkowitych dodatnich od boków ściany. Istnieje więc $3 \cdot 361 = 1083$ prostych równoległych do krawędzi sześcianu i przechodzących przez wspomniane punkty kratowe.

Niech ℓ będzie jedną z tych prostych. Może ona przecinać wnętrze tylko takiego klocka K, którego ścianki 2×2 są do niej prostopadłe (trafiając w środki tych ścianek). Wybierzmy jedną z czterech krawędzi sześcianu równoległych do prostej ℓ i nazwijmy ją k.

Weźmy pod uwagę prostopadłościan P (rys.), którego jedną krawędzią jest k, jedną krawędzią jest odcinek prostej ℓ, a cztery ściany P są zawarte w ścianach sześcianu.

Jeśli prosta ℓ przecina wnętrze klocka K, to część wspólna $K \cap P$ jest sześcianikiem o objętości 1. Jeśli K' jest klockiem nie przekłutym przez prostą ℓ, to zbiór $K' \cap P$ ma objętość 4, 2 lub 0. Objętość prostopadłościanu P jest liczbą parzystą; zatem prosta ℓ przecina wnętrza parzystej liczby klocków. To znaczy, że albo nie przecina żadnego, albo co najmniej dwa. Wśród rozważanych 1083 prostych jest wobec tego nie więcej niż 1000 prostych, które przecinają wnętrze jakiegoś klocka. Stąd teza.



Rysunek 2.
(Rozwiązanie zadania 9a ze str. 7)

410. Załóżmy, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają postulowane warunki. Wówczas

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} (x_i + 1)(2x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} (4x_i^3 - 3x_i + 1) = 0,$$

więc każda z liczb x_i jest równa -1 lub $1/2$. Przyjmijmy, że -1 występuje k razy, a $1/2$ występuje $n-k$ razy. Każdy z warunków $\sum x_i = n/3$ oraz $\sum x_i^3 = 0$ sprowadza się do równości $n = 9k$.

Wniosek: liczba n musi dzielić się przez 9. Na odwrót, jeśli n jest liczbą podzielną przez 9, to podane warunki są spełnione przez ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w którym jest $n/9$ wyrazów równych -1, a pozostałe są równe $1/2$.

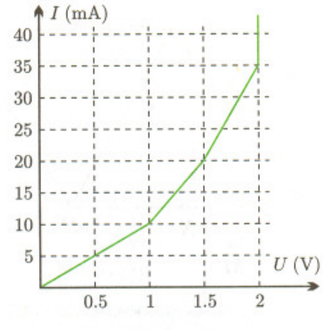
Zadania z fizyki nr 314, 315

Redaguje Jerzy B. BROJAN

314. Kula naładowana powierzchniowo stałą gęstością ładunku składa się z dwóch zetkniętych półkul o tej samej masie. W wyniku wzajemnego odpychania półkule zaczęły się poruszać i oddaliły się na bardzo dużą odległość (ruch zachodzi bez oporów). W którym przypadku prędkość uzyskana przez półkule będzie większa: gdy są przewodzące, czy gdy są nieprzewodzące?

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2001

315. Mamy do dyspozycji dowolne oporniki oraz dowolną liczbę idealnych diod o napięciu progowym 1 V (tzn. nie przewodzących prądu przy niższym napięciu, a przewodzących dowolnie duży prąd przy napięciu minimalnie większym). Zaprojektować jak najprostszy obwód o dwóch wyjściach, którego charakterystyka prądowo-napięciowa jest dana na przedstawionym wykresie (rys. 1).



Rys. 1

Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, gdyby punkt łamanej o współrzędnych $(2;35)$ przesunąć w górę do $(2;50)$? (Autorowi nie udało się ani znaleźć tego rozwiązania, ani udowodnić, że nie istnieje.)

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 302 (WT=2,84) i 303 (WT=3,01) z numeru 9/2000

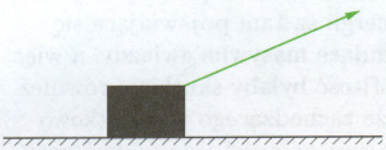
Jarosław Łazuka	– Warszawa	46,36
Marek Wójcicki	– Szczecin	37,47
Aleksander Surma	– Myszków	33,98
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	33,66
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	33,56
Tomasz Rudny	– Warszawa	25,20

Pan Łazuka zaliczył 44 punkty po raz trzeci, zostając ósmym Weteranem **Klubu 44 F**.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2000

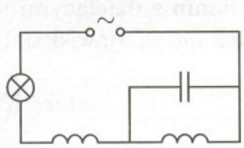
Przypominamy treść zadań:

306. Jaką minimalną siłą trzeba działać na klocek o ciężarze P, aby ruszyć go z miejsca (zob. rys. 2), jeśli współczynnik tarcia między klockiem a podłożem jest równy f?



Rys. 2

307. Dwie jednakowe cewki, kondensator i żaróweczkę zestawiono w obwód (rys. 3) i podłączono do źródła napięcia przemiennego. W poniższych zdaniach wybrać właściwe wersje wyrazów w nawiasach i uzasadnić. Opór uzwojeń cewek można pominąć.
Gdy zwroty nawinięcia obu cewek były zgodne, okazało się, że podczas przesuwania jednej cewki względem drugiej przy pewnej szczególnej ich odległości żaróweczka świeci się (silniej/słabiej), niż przy innych sąsiednich położeniach. Gdy jedną z cewek odwrócono, tak że zwrot jej nawinięcia był przeciwny względem drugiej, również wystąpiła taka szczególna odległość cewek, dla której żaróweczka świeciła się (silniej/słabiej). Gdy zwiększono pojemność kondensatora i ponownie poszukano obu tych szczególnych przypadków, okazało się, że pierwszy z nich występuje przy (większej/mniejszej) odległości cewek niż poprzednio, a drugi przy (większej/mniejszej).



Rys. 3

306. Oznaczmy siłę działającą na klocek przez F, a kąt między jej kierunkiem a poziomem przez α. Siła nacisku klocka na podłoże wynosi $P - F\sin\alpha$, czyli maksymalną wartością siły tarcia jest $f(P - F\sin\alpha)$. W chwili ruszenia klocka siła ta równa się poziomej składowej siły F, a stąd

$$F = \frac{Pf}{\cos\alpha + f\sin\alpha}.$$

Maksymalną wartość mianownika znajdziemy, przyrównując jego pochodną względem α do zera. Otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha = f$, czyli

$$F_{\min} = \frac{Pf}{\sqrt{1+f^2}}.$$

307. Zauważmy na wstępie, że opór R żaróweczki dodaje się do impedancji reszty obwodu Z wg wzoru $Z_{\text{całk}} = \sqrt{R^2 + Z^2}$, a więc szukając położenia, w którym żaróweczka świeci się najsilniej (ew. najsłabiej), można ten opór pominąć. Wprowadźmy oznaczenia: indukcyjność cewki L, współczynnik indukcji wzajemnej cewek M (dodatni dla zgodnego nawinięcia), amplituda napięcia U źródła, częstość $\omega = 2\pi f$, amplituda prądu I_1 płynącego przez prawą cewkę, amplituda prądu I_2 płynącego przez kondensator. Ze względu na pominięcie oporu jedyną możliwą wartością przesunięcia fazy między prądami lub też między napięciami jest π, co w razie potrzeby uwzględnimy, przypisując jednej z amplitud znak ujemny. Z praw Kirchhoffa wynikają równania

$$I_1L\omega + (I_1 + I_2)M\omega = -\frac{I_2}{C\omega},$$
$$U = (I_1 + I_2)L\omega + I_1M\omega - \frac{I_2}{C\omega}.$$

Rozwiązując je, znajdujemy amplitudę prądu płynącego przez żaróweczkę

$$I_1 + I_2 = \frac{U}{(L-M)\omega - (2/C\omega)}\,\frac{L\omega - (1/C\omega)}{(L+M)\omega}.$$

Zmiana odległości między cewkami wpływa tylko na współczynnik indukcji wzajemnej M. Widzimy, że rezonans – nieskończona wartość $I_1 + I_2$ (w praktyce ograniczona przez opór żaróweczki) – występuje dla $M_1 = L - 2/C\omega^2$, natomiast drugi przypadek $M = -L$ odpowiada maksymalnemu sprzężeniu, które wymagałoby osadzenia obu cewek na wspólnym rdzeniu, co nie jest zgodne z opisem zadania. Minimalna wartość $I_1 + I_2$ występuje dla $M_2 = -1/C\omega^2$; ponieważ $M_2 < 0$, więc zgodność z podanymi w treści zadania obserwacjami wymaga, aby $M_1 > 0$. Zwiększenie wartości C oznacza zwiększenie M_1 (rezonans wystąpi przy mniejszej odległości cewek) i zmniejszenie $|M_2|$ (większa odległość).