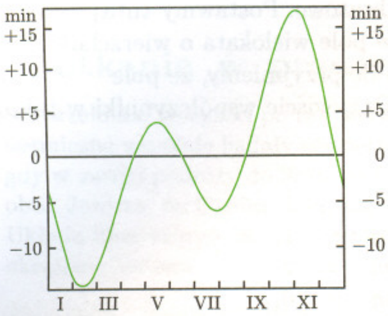


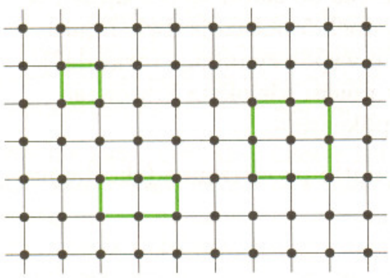
Rys. 2. Równanie czasu.

Równanie czasu można na każdy dzień obliczyć, jest też stablicowane w rocznikach astronomicznych (rys. 2). Przyjmuje ono wartość zerową tylko cztery razy w roku: 16 IV, 14 VI, 1 IX i 24 XII – wtedy słońce średnie i prawdziwe pokrywają się. Wykreślenie podziałki zegara w tych dniach zagwarantuje nam, że będzie to podziałka „średnia", najodpowiedniejsza na cały rok. Wartości maksymalne (wynoszące około kwadransa) równanie czasu osiąga dwa razy w roku (12 II i 3 XI). Tak więc zegary słoneczne „chodzą" dość kiepsko, niekiedy z błędem wynoszącym nawet kwadrans, nic więc dziwnego, że już od dawna służą jedynie do ozdoby parków i placów.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

Hipoteza, twierdzenie, dowód, kontrprzykład

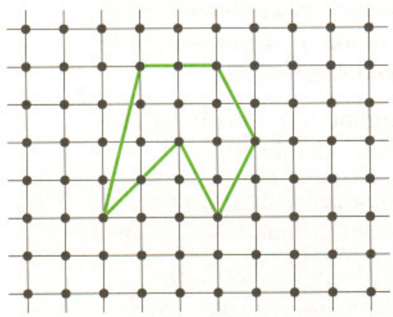
Marek KORDOS



Rys. 1

Tytuł tej notatki to żart opisujący tok pracy matematyka. Oczywiście w rzeczywistości raczej rzadko się zdarza, aby matematyk jakąś hipotezę (a więc przypuszczenie) ogłaszał jako twierdzenie (a więc sąd prawdziwy), a potem dopiero znajdował jego dowód, by po opublikowaniu go znaleźć kontrprzykład (czyli przykład tę hipotezę obalający, a więc przeczący twierdzeniu). Zazwyczaj mając hipotezę, poszukujemy albo dowodu, albo kontrprzykładu. I w zasadzie zawsze (wcześniej lub później) znajduje się albo jedno, albo drugie, a bywa i tak, że dowodzimy, iż hipoteza rozstrzygnąć się nigdy nie da. Oto dwa przykłady, na których można to sobie przećwiczyć.

Wielokąty na kracie



Rys. 2. $W = 6$, $B = 8$, $P = 9$.

Pewnego dnia pod koniec XIX wieku matematyk (austriacki, ale przez przeważającą część życia pracujący w czeskiej Pradze) Georg Pick wpadł na pomysł, że pole każdego wielokąta (narysowanego w układzie współrzędnych o wierzchołkach w punktach kratowych (czyli o obu współrzędnych całkowitych) da się opisać za pomocą wyrażenia stopnia pierwszego względem liczby W punktów kratowych leżących wewnątrz tego wielokąta i względem liczby B punktów kratowych leżących na brzegu tego wielokąta. A zatem pole P dane jest wzorem

$$(\star) \qquad kW + lB + m,$$

dla pewnych stałych $k,\ l,\ m$.

Gdyby tak rzeczywiście było, to stałe te można bez trudu znaleźć: trzy wielokąty przedstawione na rysunku 1 dają układ trzech równań

$$\begin{cases} k\cdot 0 + l\cdot 4 + m = 1, \\ k\cdot 0 + l\cdot 6 + m = 2, \\ k\cdot 1 + l\cdot 8 + m = 4, \end{cases}$$

mający rozwiązanie $k = 1$, $l = \frac{1}{2}$, $m = -1$. Zatem wzór miałby (ewentualnie) postać

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1.$$

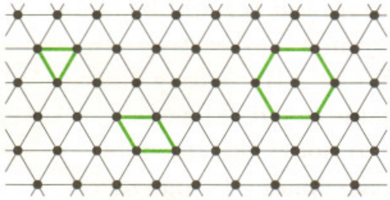
To była hipoteza Picka. Mógł dla niej szukać dowodu, albo kontrprzykładu. Wybrał to pierwsze i udało mu się: w 1899 ukazała się praca *Geometrisches zur Zahlenlehre*, w której ten dowód się znajdował. Nie będę go tu przedstawiał, tylko zaproponuję wykonanie go samemu lub znalezienie go w jednym ze wskazanych obok miejsc (bądź też w dowolnym innym miejscu).

Kolejność według łatwości dostępu; przy okazji: to, co najłatwiej znaleźć, jest najbardziej szkicowe – dokładny dowód jest podany w ostatniej notce.

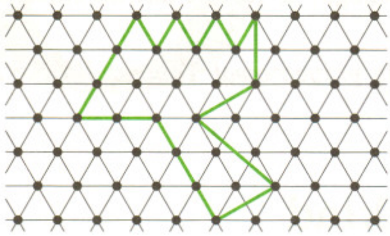
- H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, np. WSiP 1989, rozdz. IV, pkt. 107;
- H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, np. 1967, rozdz. 13, par. 13.5;
- *Delta* 4/1993, str. 11.

Tym, których gniewa, iż nie są to odsyłacze internetowe, przypominam, że wszystko, co mogą znaleźć w internecie, jest mniej lub bardziej starannie przepisane przez webmasterów (i współpracujących z nimi maszynistów) ze źródeł tradycyjnych.

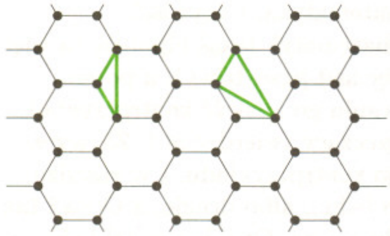
Obejrzyjmy teraz podobną hipotezę na podobny temat. Punktami kratowymi niekoniecznie muszą być punkty siatki kwadratowej. Łatwo wyobrazić sobie



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

siatkę z trójkątów równobocznych i jej punkty kratowe. Postawmy tutaj hipotezę analogiczną do hipotezy Picka, czyli że pole wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych dane jest wzorem $(\star)$, o ile przyjmiemy, że pole najmniejszego trójkąta tej siatki jest równe 1. Oczywiście współczynniki w takim wzorze powinny być inne.

Z rysunku 3 możemy uzyskać układ równań

$$\begin{cases} k\cdot 0 + l\cdot 3 + m = 1, \\ k\cdot 0 + l\cdot 4 + m = 2, \\ k\cdot 1 + l\cdot 6 + m = 6, \end{cases}$$

mający rozwiązanie $k=2$, $l=1$, $m=-2$. Zatem wzór tym razem miałby (ewentualnie) postać

$$P = 2W + B - 2.$$

Można go sprawdzić na bardziej skomplikowanym przykładzie (rys. 4). Wychodzi $2\cdot 5 + 18 - 2 = 26$, co zgadza się (czy na pewno?) z sytuacją na rysunku. Tylko, że to o niczym nie świadczy. Co najwyżej przemawia za tym, by poszukiwać raczej dowodu niż kontrprzykładu (choć pozory czasem mylą). A więc do roboty!

Gdybyśmy spróbowali dostosować twierdzenie Picka do siatki sześciokątnej, to szybko okazałoby się, że jest to niemożliwe. Rysunek 5 pokazuje dwie figury, dla których wzór $(\star)$ daje sprzeczne informacje o współczynniku l (prawda?). Istnieje kontrprzykład, a więc zależność między polem wielokąta kratowego a punktami kratowymi musi być bardziej skomplikowana.

A jak jest z uogólnieniem twierdzenia Picka na siatki przestrzenne (choćby na siatkę sześcienną)?

Cięciwy figur wypukłych

Teraz będzie o nowszych sprawach. Proszę poszukać dowodu lub kontrprzykładu dla następującej hipotezy (rys. 6):

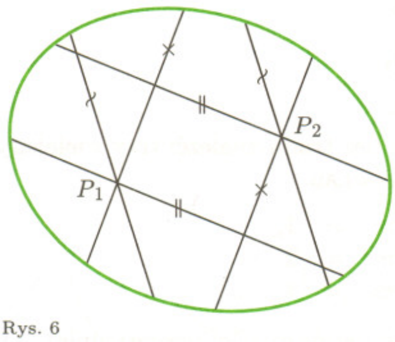
> jeżeli w figurze (płaskiej) wypukłej każde dwie równoległe cięciwy, przechodzące odpowiednio przez pewien punkt P_1 i pewien punkt P_2, są tej samej długości, to figura ma środek symetrii.

Figura wypukła to taka, która wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek.

Tym, którzy wybrali dowód, jako ewentualna pomoc może posłużyć fakt, że wtedy środkiem symetrii byłby zapewne środek odcinka P_1P_2.

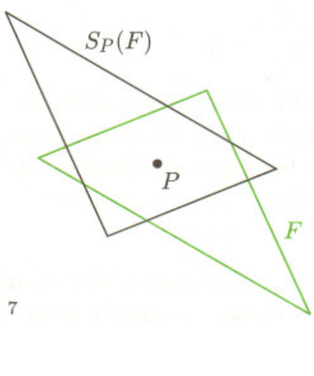
Druga hipoteza została postawiona i udowodniona przez angielskiego (a może szkockiego, bo z St. Andrews) matematyka, Kennetha Falconera, w 1983 roku:

> jeśli dla każdego kierunku znamy długość cięciwy przechodzącej przez punkt P i znamy (niekoniecznie taką samą) długość cięciwy przechodzącej przez punkt Q, to znamy tym samym figurę wypukłą, której są to cięciwy.



Rys. 6

To niestaranne sformułowanie można sprecyzować tak. Dana jest figura wypukła F. Dla dowolnego punktu P, leżącego wewnątrz tej figury, funkcja f_P każdemu kierunkowi przyporządkowuje długość cięciwy figury F przechodzącej przez P i mającej ten kierunek. W ten sam sposób dla innego punktu Q określamy funkcję f_Q. Twierdzenie Falconera orzeka, iż F jest jednoznacznie określona przez te dwie funkcje, czyli każda inna figura wypukła wyznacza przynajmniej jedną funkcję inną.



Rys. 7

Oczywiście, jeden punkt i jedna funkcja nie wystarczą do jednoznacznego wyznaczenia figury. Kontrprzykład dla przeciwnej hipotezy stanowi dowolna figura wypukła F i punkt P nie będący jej środkiem symetrii: obraz symetryczny F względem P ma taką samą funkcję f_P (rys. 7).

Natomiast pomysł, że jedna funkcja f_P wyznacza figurę wypukłą z dokładnością do przystawania, ma ciągle (o ile mi wiadomo) status hipotezy. Może więc ktoś z Czytelników z tym się upora.