3/01 (39)

Γ-limatias

$\lim_{n\to\infty}$

DLACZEGO? (2)

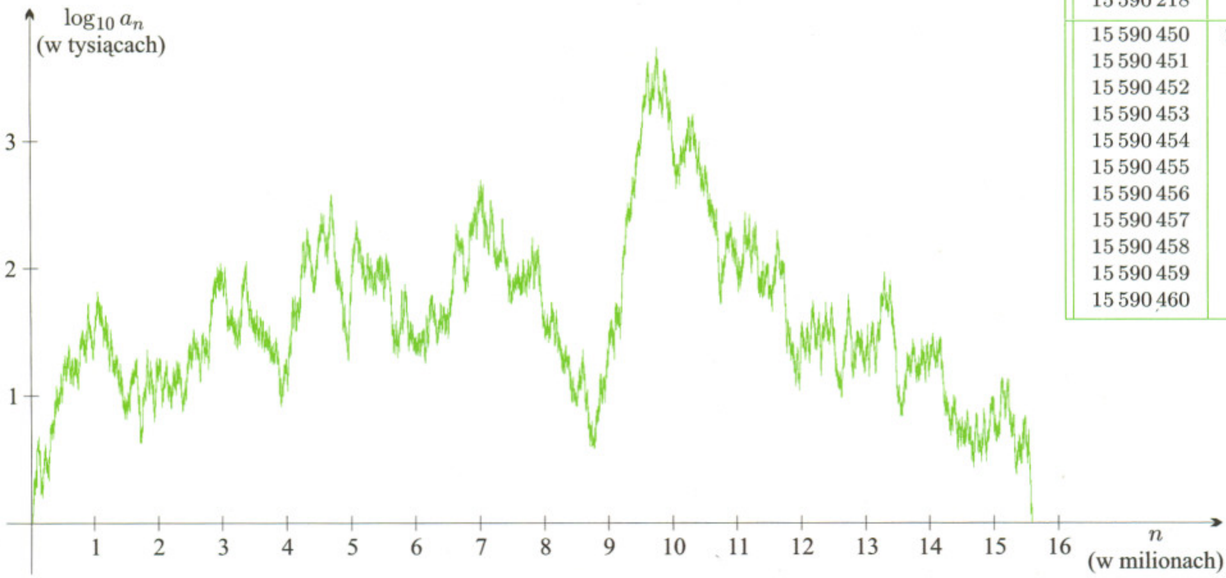
Pewnie sądziłeś, Drogi Czytelniku, że znajdziesz tu wykres przedstawiający sto milionów wyrazów zdefiniowanego poprzednio ciągu (a_n). Ja w każdym razie stu milionów nie obiecywałem, za to podaję wykres ponad 15 milionów wyrazów (rysunek) oraz krótką tabelkę.

Ciąg (a_n) spada do jedynki po ponad 15 milionach wyrazów! Dokładniej, $a_n = 1$ dla $n \geq 15590459$.

DLATEGO tak dokładnie przedstawiałem jego zachowanie w poprzednim Γ-limatiasie. Z tabelki widać, że przed stabilizacją na wartości 1 ciąg schodzi poniżej tysiąca, po czym na krótko odbija w górę.

Liczba 1 jest punktem stałym zdefiniowanego poprzednio przekształcenia f (tzn. $f(1) = 1$), zatem wystarczy, że pewien wyraz ciągu jest równy 1, a wszystkie następne też muszą być jedynkami.

n	a_n
15 590 216	691
15 590 217	883
15 590 218	677
15 590 450	299 653
15 590 451	12 763
15 590 452	1 957
15 590 453	3 751
15 590 454	4 793
15 590 455	689
15 590 456	283
15 590 457	31
15 590 458	17
15 590 459	1
15 590 460	1

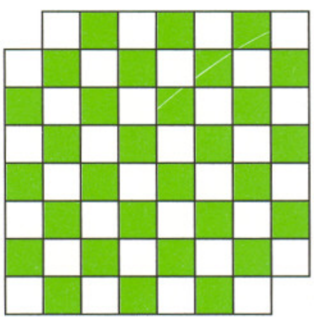


DLACZEGO dopiero po ponad 15 milionach iteracji funkcji f doszliśmy do punktu stałego, skoro po drodze wydawało się, że dany ciąg ucieka do nieskończoności?

DLACZEGO? Gdzie był ukryty nierychliwy, ale nieustępliwy mechanizm, który w końcu wędrujący pod niebiosa ciąg ściągnął na ziemię po kilkunastu milionach wyrazów?

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (24)

ZADANIE: Z sześcianu o krawędzi 8 usunięto z dwóch przeciwległych naroży sześciany o krawędzi 1. Rozstrzygnąć, czy tak otrzymaną bryłę można podzielić na 255 prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 1 \times 2$.



Rozwiązanie: Nie można. Na początek przeanalizujmy analogiczne zadanie na płaszczyźnie. Szachownicę 8×8 z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożami kolorujemy dwoma kolorami (czarnym i białym) tak, aby pola sąsiadujące bokiem były pokolorowane różnymi kolorami (rysunek). Widzimy, że usunięte pola mają ten sam kolor (na rysunku czarny), pozostało więc 30 pól czarnych i 32 białe. Ponieważ każdy prostokąt 2×1 wycięty (po kratkach) z szachownicy zawiera po jednym polu każdego koloru, danej figury nie można podzielić na 31 prostokątów.

Analogiczne rozumowanie stosujemy do podanej figury przestrzennej. Kolorujemy sześciany jednostkowe dużego sześcianu dwoma kolorami tak, aby sześciany mające wspólną ścianę miały różne kolory. Ponieważ przeciwległe naroża pokolorowane są tym samym kolorem, więc ich usunięcie (załóżmy, że są czarne) pozostawia 254 sześciany czarne i 256 białych. Każdy prostopadłościan $1 \times 1 \times 2$ zawiera pola różnego koloru, więc podział opisany w zadaniu nie jest możliwy.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl