Dlaczego na podium są zawsze trzy miejsca?

Jerzy TYSZKIEWICZ

Artykuł ten dedykuję Lidii Korzeniewskiej i Robertowi Hajłaszowi, moim szkolnym nauczycielom matematyki.

Całkiem często zdarza się w sporcie następująca sytuacja: kilka drużyn rozgrywa turniej metodą „każdy z każdym”. I wówczas pojawia się kłopot: oto z grupy eliminacyjnej awansuje jedna drużyna, a tymczasem tabelka z wynikami meczów wygląda następująco:

A	$\times$		
B	0	$\times$	
C	1	0	$\times$
	A	B	C

czyli B przegrała z A, a C wygrała z A i przegrała z B. W takiej sytuacji trudno jest wskazać tę drużynę, która powinna awansować, bo jakkolwiek byśmy ją wybrali, wśród tych nie awansujących jest drużyna jednoznacznie od niej lepsza. Różne są sposoby wybrnięcia z takiego kłopotu. Czasem rozpatruje się liczbę zdobytych bramek, czasem liczbę straconych, czasem różnicę między tymi liczbami; w odwodzie jest jeszcze zawsze wyjście ostateczne: losowanie.

Wyobraźmy sobie, że chcemy z kilku graczy, po rozegraniu turnieju, znowu metodą „każdy z każdym”, wyłonić dwóch najlepszych. Czy może się trafić podobny problem jak poprzednio: niezależnie od wyboru zwycięzców, jest wśród pozostałych taki pechowiec, który z nimi oboma wygrał? (Słowo pechowiec jest w takiej sytuacji chyba całkowicie usprawiedliwione: wygrał z dwoma najlepszymi, a sam nagrody nie dostał.)

A gdybyśmy mieli wybrać trzech zwycięzców? Albo, ogólnie, k najlepszych?

Żeby dokładnie zrozumieć, o co pytamy, umówmy się, że wyniki turnieju rozegranego przez $n > 1$ graczy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zapisujemy w postaci tabelki podobnej, jak poprzednio, gdzie kropki oznaczają 0 lub 1.

A_1	$\times$			
A_2	$\cdot$	$\times$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
A_n	$\cdot$	$\cdot$	$\ldots$	$\times$
	A_1	A_2	$\ldots$	A_n

To, co nam wyszło, matematycy nazywają *turniejem*: jest to zbiór (zawsze skończony) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ elementów zwanych *graczami*, oraz relacja *zwyciężania* między graczami spełniająca warunki: żaden gracz nie jest w relacji z samym sobą, a dla dowolnych dwóch różnych graczy A, B dokładnie jeden z nich zwycięża drugiego. Właśnie ta relacja jest opisana naszą tabelką. 1 w j-tym wierszu i i-tej kolumnie oznacza, że gracz A_j zwycięża gracza A_i, a 0 w tym samym miejscu oznacza, że gracz A_i zwycięża gracza A_j.

Mówimy, że turniej T ma własność W_k, gdy dla każdego podzbioru k jego graczy istnieje inny gracz, który zwycięża każdego w tym k-elementowym podzbiorze. Nasz turniej z drużynami A, B i C ma własność W_1.

Oczywiście, jeśli turniej ma własność W_k, to dla dowolnego $l < k$ ma własność W_l.

Kurt Schütte (1909–1998), niemiecki logik i matematyk, był doktorantem Davida Hilberta.

Chcemy wiedzieć, czy dla każdego naturalnego k istnieje turniej o własności W_k. Jest to pytanie, które w 1962 roku zadał sobie Kurt Schütte. Znalazł on, oprócz przykładu turnieju o własności W_1, także turniej, mający własność W_2, na pytanie w całej ogólności jednak nie umiał odpowiedzieć. Zapytał więc o to Paula Erdősa.

Jeszcze tego samego dnia Erdős znał już rozwiązanie: tak, takie turnieje istnieją. Jego dowód był niezwykle pomysłowy i elegancki: jeżeli wyjściowa liczba graczy jest dostatecznie duża (w zależności od wybranego k), a wyniki gier ustalane losowo (np. przez rzut symetryczną monetą), to szansa, że tak powstały turniej ma własność W_k, jest dodatnia. Wynika z tego, że można tak dobrać wyniki gier, aby turniej miał tę własność, bo gdyby to było niemożliwe, to prawdopodobieństwo wylosowania takiego turnieju byłoby oczywiście 0. Dowód jest króciutki, a rachunki nietrudne.

Niech n będzie liczbą graczy w turnieju. Jak powiedzieliśmy, wyniki losujemy, rzucając symetryczną monetą, a rzuty są dla różnych gier niezależne. Będziemy szacować prawdopodobieństwo tego, że wylosowany tym sposobem turniej *nie ma* własności W_k. Po pierwsze, dla dowolnych, ale ustalonych k graczy zdarzenie polegające na tym, że pewien ustalony gracz spośród pozostałych *nie* wygra ze wszystkimi k poprzednimi, ma prawdopodobieństwo $1-2^{-k}$. Ponieważ wszystkie zdarzenia tej postaci, różniące się wyborem tego dodatkowego gracza, są niezależne, więc prawdopodobieństwo zdarzenia, że tych ustalonych k graczy nie zostanie pokonanych przez *żadnego* z graczy pozostałych, jest iloczynem prawdopodobieństw i wynosi $(1-2^{-k})^{n-k}$. W końcu, zdarzenie, że wylosowany turniej *nie ma* własności W_k, jest sumą wszystkich zdarzeń, że *jakichś* k graczy nie zostało jednocześnie pokonanych przez jednego gracza. Ponieważ zawsze prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie jest większe niż suma ich prawdopodobieństw

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \le \mathrm{P}(A_1) + \ldots + \mathrm{P}(A_m),$$

to prawdopodobieństwo, że wylosowany turniej *nie ma* własności W_k, nie przekracza $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}$. Jak łatwo sprawdzić (np. używając kryterium d'Alemberta), ten ostatni ciąg jest zbieżny do 0 przy $n \to \infty$, a co za tym idzie, dla dużych n prawdopodobieństwo wylosowania turnieju o własności W_k jest dodatnie.

$\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od x.

$\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Czy to już pełnia szczęścia? Nie całkiem. Ludzie mają to do siebie, że zwykle nie zadowalają się świadomością, że coś *jest*, tylko chcą to *zobaczyć*. A tego pragnienia dowód Erdősa nie realizuje. Oczywiście, można wziąć niezbędną liczbę graczy i rzucać monetą w celu ustalenia wyników gier. Okazuje się, że w dowodzie Erdősa wystarcza $\lceil 2^k k(k\ln 2 + 2\ln k)\rceil$ graczy, co dla $k=3$ wynosi 103, więc trzeba wykonać $\binom{103}{2} = 5253$ rzuty. Mamy wówczas sporą szansę, że powstały turniej będzie miał własność W_3. Jednak sprawdzenie, czy jest tak na pewno, jest niesłychanie pracochłonne (a można przecież też mieć pecha w losowaniu...). Samych trójlementowych zbiorów graczy jest $\binom{103}{3} = 176\,851$. Losowanie i sprawdzanie można wprawdzie powierzyć komputerowi, ale dla $k=4$ nawet on będzie w opałach, a dla $k=5$ nie da już sobie rady.

Niewierni Tomasze matematyki szukali więc metody, by takie turnieje *konstruować* raczej, niż tylko dowodzić ich istnienia. Taka właśnie konstrukcja została znaleziona przez Ronalda Grahama i Joela Spencera w 1971 roku. Niestety, zatraciła ona całkowicie elementarność dowodu Erdősa. Dość powiedzieć, że twierdzeń niezbędnych do udowodnienia, iż konstruowane turnieje mają istotnie własność W_k, nie zna nawet większość zawodowych matematyków, tak są specjalistyczne.

Autor tego artykułu znalazł jednak niedawno całkiem prostą konstrukcję turniejów o własności W_k, którą zaraz tu opiszemy.

Zauważmy, że dla tego celu wystarczy podać operację, która dany turniej T o własności W_k przekształci w nowy turniej T' o własności $W_{k'}$, gdzie $k' > k$. Wtedy, zaczynając od jakiegoś ustalonego turnieju T o własności, powiedzmy, W_2, turnieje T, T', T'', T''', ... będą miały własność W_k z coraz to większym k. Kontynując ten ciąg dostatecznie daleko, można wtedy uzyskać turniej z własnością W_k dla dowolnie dużego k.

Teraz opiszemy taką metodę przeróbki turnieju T. Zawodnikami turnieju T' będą uporządkowane *drużyny*, każda składająca się z 3 graczy turnieju T. Uporządkowanie oznacza, że kolejność graczy w drużynie jest istotna, np. na nasze potrzeby drużyny (A,B,C) i (C,B,A) będą różne. Mecz takich drużyn odbywa się następująco:

- Pierwszy gracz pierwszej drużyny gra z pierwszym graczem drugiej drużyny.
- Drugi gracz pierwszej drużyny gra z drugim graczem drugiej drużyny.
- Trzeci gracz pierwszej drużyny gra z trzecim graczem drugiej drużyny.
- Wyniki gier brane są z turnieju T, a wygrywa ta drużyna, która ma więcej zwycięstw indywidualnych.

Te zasady nie wystarczają do rozstrzygnięcia każdego meczu. Na przykład nie wiadomo, jaki powinien być wynik spotkania drużyn (A,B,C) i (B,A,C). Okazuje się jednak, że niezależnie od tego, jak potraktujemy takie wątpliwe przypadki, jeśli tylko turniej T ma własność W_k z $k>1$, to turniej T' ma własność $W_{k'}$, gdzie $k' = \lfloor 3k/2 \rfloor > k$.

Przekonajmy się o tym. Niech więc $(A_1, B_1, C_1), \ldots, (A_{\lfloor 3k/2\rfloor}, B_{\lfloor 3k/2\rfloor}, C_{\lfloor 3k/2\rfloor})$ będą dowolnymi drużynami w turnieju T'. Zbiory

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\},$$
$$\{B_{\lfloor k/2\rfloor+1}, B_{\lfloor k/2\rfloor+2}, \ldots, B_{\lfloor 3k/2\rfloor}\},$$
$$\{C_1, C_2, \ldots, C_{\lfloor k/2\rfloor}, C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_{\lfloor 3k/2\rfloor}\}$$

składają się z co najwyżej k graczy każdy. Istnieją więc gracze A', B', C', wygrywający ze wszystkimi graczami z odpowiednich zbiorów. Jak łatwo sprawdzić, zespół (A', B', C') wygrywa mecz z każdą z wyjściowych drużyn, bo uzyskuje zawsze co najmniej dwa zwycięstwa indywidualne. I to już koniec dowodu poprawności naszej konstrukcji. Twierdzenie Erdősa zostało wykazane.

Należy tu wspomnieć o liczbie graczy, która jest niezbędna dla uzyskania własności W_k. Okazuje się, że niekonstruktywny dowód Erdősa jest najoszczędniejszy, dowód przedstawiony w tym artykule jest najrozrzutniejszy, zaś konstrukcja Grahama i Spencera lokuje się pośrodku.

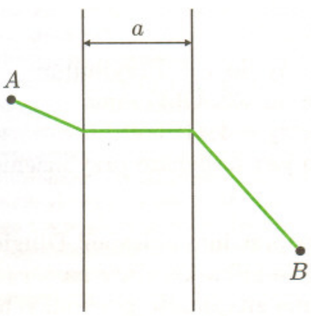
Ale, ale: dlaczego podium ma zawsze trzy miejsca? To całkiem proste: najmniejszy turniej, który ma własność W_2, liczy tylko 7 graczy (wiedział to już Schütte), czyli przy dwumiejscowym podium w wielu ligach mogłyby się zdarzać fatalne sytuacje, że pogromca wszystkich medalistów sam medalu nie ma. Tymczasem, jak wykazali Esther i George Szekeres, każdy turniej o własności W_3 liczyć musi co najmniej 19 graczy (i tylu ich wystarcza). Teraz wszystko jest jasne: oto dlaczego na podium są zawsze trzy miejsca, a ligi we wszelkich dyscyplinach liczą na ogół nie więcej niż 18 zespołów!

Osobom zainteresowanym innymi niekonstruktywnymi dowodami istnienia skończonych obiektów można polecić książkę Zbigniewa Palki i Andrzeja Rucińskiego *Niekonstruktywne metody matematyki dyskretnej*, WNT 1996.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Pamiętacie zapewne zadanie pod tytułem „Jedzie Arab na wielbłądzie przez pustynię, chce dotrzeć na imprezę do najbliższej oazy, ale przedtem chce jeszcze umyć zęby w rzece. Jaką drogę ma obrać, żeby było najkrócej?". Typowe zadanko do zabłyśnięcia na szkolnym party. W tym miesiącu więcej materiału do zaimponowania ładnym koleżankom z klasy!



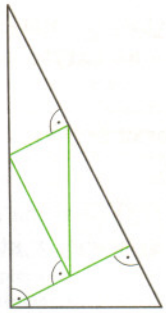
M 946. Na płaszczyźnie dane są dwa miasta A i B, które leżą po różnych stronach rzeki o szerokości a (linie brzegowe są prostymi równoległymi). Gdzie trzeba wybudować most (prostopadły do linii brzegowych), aby droga od A do B przez ten most była najkrótsza (rysunek obok)?
Rozwiązanie na str. 13

M 947. Wykazać, że dowolny czworokąt wpisany w kwadrat $PQRS$ o boku 1 (po jednym wierzchołku na każdym boku) ma obwód nie mniejszy niż $2\sqrt{2}$.
Rozwiązanie na str. 7

M 948. Wewnątrz trójkąta ABC dane są dwa różne punkty M i N. Znaleźć najkrótszą drogę od M do N, która ma wspólne punkty kolejno z bokami AB, BC i AC.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 543. Promień r_0 koła lokomotywy jest równy 1 m w temperaturze $t_0 = 0°\mathrm{C}$. Wyznaczyć różnicę w liczbie obrotów koła latem w temperaturze $t_1 = 25°\mathrm{C}$ i zimą w temperaturze $t_2 = -25°\mathrm{C}$ na drodze $l = 1000$ km (współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}/\mathrm{K}$).
Rozwiązanie na str. 13



Rysunek 1.
(Rozwiązanie zadania 1 ze str. 7)

F 544. O ile opóźni się na dobę zegar ścienny, który został wyregulowany w temperaturze $t_1 = 15°\mathrm{C}$, jeśli umieścić go w pokoju o temperaturze $t_2 = 30°\mathrm{C}$. Wahadło zegara ma długość $l = 0{,}5$ m (w temperaturze t_0) i wykonane jest z mosiądzu ($\alpha = 2 \cdot 10^{-5}/\mathrm{K}$).
Rozwiązanie na str. 13