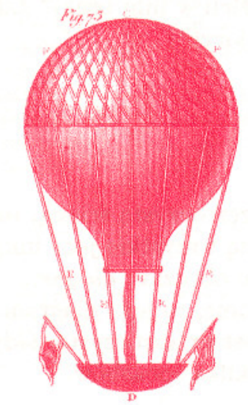
Zbieżność ciągów danych przez relację

Cristinel MORTICI



Zajmować się będziemy ciągami $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ danymi przez zależność

$$f(x_n) = a_n, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie f to pewna funkcja odwracalna, natomiast (a_n) to jakiś ciąg. Zauważmy, że w ogólnej sytuacji nie potrafimy bezpośrednio wyliczyć wyrazów ciągu x_n, a nawet jeśli potrafimy, to i tak zazwyczaj nie mamy na to ochoty. Do badania zbieżności ciągu x_n, a także tempa tej zbieżności wcale nie musimy jednak ciągu x_n wyliczać. Wystarczy, że skorzystamy z następującego stwierdzenia:

Jeżeli f i f^{-1} są funkcjami ciągłymi, a ciąg a_n jest zbieżny do a, to ciąg x_n jest zbieżny do $l = f^{-1}(a)$. Jeśli ponadto f ma ciągłą pochodną oraz $f'(l)$ jest różne od zera, to tempo zbieżności ciągu x_n określa wzór

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - l}{a_n - a} = \frac{1}{f'(l)}.$$

Widać, że to prawda. Przejdźmy zatem do przykładów.

ZADANIE 1. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację

$$x_n + \ln x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{dla} \quad n \geq 1$$

jest zbieżny do 1 oraz $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Funkcja $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$ jest ściśle rosnąca i różniczkowalna, więc mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 1.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) - f^{-1}(1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1} = \left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

ZADANIE 2. Wykaż, że ciąg x_n określony przez relację

$$\frac{1}{x_n} + \operatorname{arctg} x_n = n, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do zera oraz $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Rozwiązanie. Podaną zależność możemy równoważnie zapisać jako

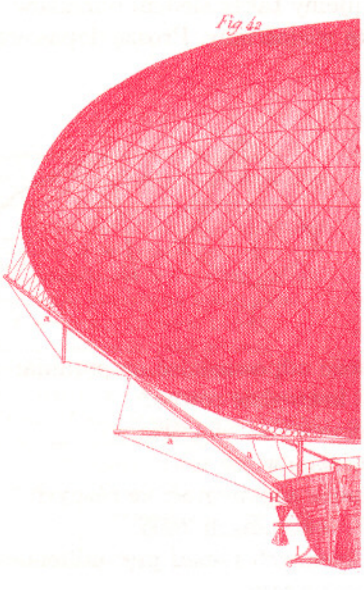
$$\frac{x_n}{1 + x_n \operatorname{arctg} x_n} = \frac{1}{n}, \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Zatem dla $f : [0,\infty) \to \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x \operatorname{arctg} x}$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - f^{-1}(0)}{\frac{1}{n} - 0} = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$



ZADANIE 3. Niech ciągi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ spełniają relację

$$\sin(a_n + b_n) = 2a_n + 3b_n, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wykaż, że jeśli a_n dąży do zera, to b_n też. Oblicz granicę ciągu $\dfrac{a_n}{b_n}$.

Rozwiązanie. Ciąg $(2a_n + 3b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ograniczony, więc $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ także, bo a_n jest zbieżny. Gdyby b_n nie dążył do zera, to niech $(b_{k_n})_{n\in\mathbf{N}}$ będzie takim jego podciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_{k_n} = l$, gdzie $l \neq 0$. Wówczas w granicy przy n dążącym do nieskończoności z równości

$$\sin(a_{k_n} + b_{k_n}) = 2a_{k_n} + 3b_{k_n}, \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

Proponujemy też dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację
$$\operatorname{tg} x_n + \cos x_n = \sqrt[n]{n}, \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$
jest zbieżny do zera oraz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx_n}{\ln n} = 1.$$

2. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację
$$2^{x_n} - x_n = n(\sqrt[n]{e} - 1), \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$
jest zbieżny do 1 oraz
$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2(\ln 4 - 1)}.$$

otrzymujemy, że $\sin l = 3l$, więc $l = 0$. Ponadto mamy
$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\dfrac{a_n}{b_n} + 3}{\dfrac{a_n}{b_n} + 1},$$
czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -2$.

ZADANIE 4. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x istnieje takie $y = y_x$, że $\sin(x + y) = 2x + 3y$, a ponadto funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana przez zależność $f(x) = y_x$, jest ciągła. Oblicz $I = \int\limits_0^{3\pi} f(x)\,dx$.

Rozwiązanie. Gdy $t = x + y$, to mamy
$$\begin{cases} x + y = t \\ 2x + 3y = \sin t. \end{cases}$$
Zatem $x = u(t)$ oraz $y = v(t)$, gdzie $u(t) = 3t - \sin t$, $v(t) = -2t + \sin t$. Oczywiście $y_x = v(u^{-1}(x))$, więc po zamianie zmiennych
$$I = \int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \int_0^{3\pi} v(u^{-1}(x))\,dx = \int_0^{\pi} v(t)u'(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi} (-2t + \sin t)(3 - \cos t)\,dt = 2 - 3\pi^2.$$

Zadania

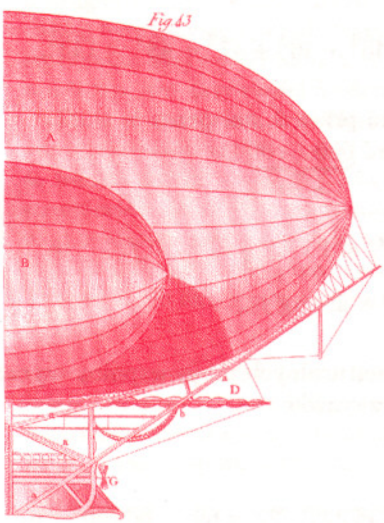
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 943. Niech $A_1, B_1, \ldots, F_1$ będą środkami boków $AB, BC, \ldots, FA$ dowolnego sześciokąta. Udowodnić, że punkty przecięcia środkowych trójkątów $A_1C_1E_1$ i $B_1D_1F_1$ pokrywają się.
Rozwiązanie na str. 6

M 944. Trójka dzieci, z których każde waży 100 kg, bawi się w berka w trójkątnej piaskownicy, biegając po jej krawędzi (zbudowanej z niezahartowanej płyty wiórowej). Wiedząc, że jednemu dziecku udało się obiec całą piaskownicę (nie łamiąc przy tym nóg ani nie demolując piaskownicy) i środek masy całej trójki pozostawał w tym czasie nieruchomy, wykazać, że środek ten pokrywał się z punktem przecięcia środkowych piaskownicy.
Rozwiązanie na str. 16

M 945. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ leżą punkty K i L odpowiednio, takie, że $BK : KC = CL : LD$. Udowodnić, że środek masy trójkąta AKL leży na przekątnej BD.
Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Piotr ZALEWSKI



F 541. Powłoka balonu o pojemności $V = 3\,000$ m^3, wraz z koszem, pełnym wyposażeniem i załogą ma masę $M = 500$ kg. Jaka jest średnia temperatura T powietrza w powłoce, skoro lecący w powietrzu o temperaturze $T_0 = 20°$C balon ani się nie wznosi, ani nie opada?

Przyjąć, że powietrze składa się z 78% azotu, 21% tlenu i 1% argonu, których masy atomowe wynoszą odpowiednio 14, 16 i 40 g/mol.
Rozwiązanie na str. 16

F 542. Oszacować różnicę między ciśnieniem wewnętrznym a zewnętrznym w najwyższej części balonu. Jak duża różnica prędkości jest potrzebna, aby uzyskać podobną różnicę ciśnień statycznych wynikającą z prawa Bernoulliego?
Rozwiązanie na str. 2