Proponujemy też dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację
$$\operatorname{tg} x_n + \cos x_n = \sqrt[n]{n}, \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$
jest zbieżny do zera oraz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n x_n}{\ln n} = 1.$$

2. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację
$$2^{x_n} - x_n = n(\sqrt[n]{e} - 1), \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$
jest zbieżny do 1 oraz
$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2(\ln 4 - 1)}.$$

otrzymujemy, że $\sin l = 3l$, więc $l = 0$. Ponadto mamy
$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{a_n}{b_n} + 3}{\frac{a_n}{b_n} + 1},$$
czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -2$.

ZADANIE 4. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x istnieje takie $y = y_x$, że $\sin(x + y) = 2x + 3y$, a ponadto funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana przez zależność $f(x) = y_x$, jest ciągła. Oblicz $I = \int_0^{3\pi} f(x)\,dx$.

Rozwiązanie. Gdy $t = x + y$, to mamy
$$\begin{cases} x + y = t \\ 2x + 3y = \sin t. \end{cases}$$
Zatem $x = u(t)$ oraz $y = v(t)$, gdzie $u(t) = 3t - \sin t$, $v(t) = -2t + \sin t$. Oczywiście $y_x = v(u^{-1}(x))$, więc po zamianie zmiennych
$$I = \int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \int_0^{3\pi} v(u^{-1}(x))\,dx = \int_0^{\pi} v(t)u'(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi} (-2t + \sin t)(3 - \cos t)\,dt = 2 - 3\pi^2.$$

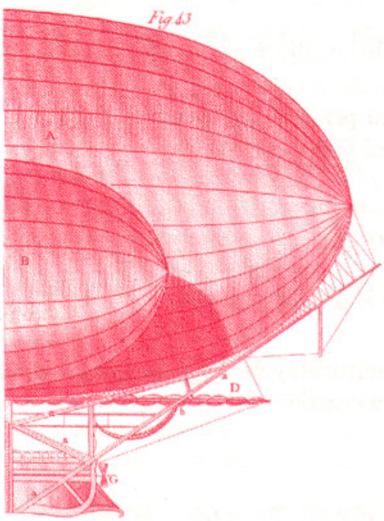
Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 943. Niech $A_1, B_1, \ldots, F_1$ będą środkami boków $AB, BC, \ldots, FA$ dowolnego sześciokąta. Udowodnić, że punkty przecięcia środkowych trójkątów $A_1C_1E_1$ i $B_1D_1F_1$ pokrywają się.
Rozwiązanie na str. 6

M 944. Trójka dzieci, z których każde waży 100 kg, bawi się w berka w trójkątnej piaskownicy, biegając po jej krawędzi (zbudowanej z niezahartowanej płyty wiórowej). Wiedząc, że jednemu dziecku udało się obiec całą piaskownicę (nie łamiąc przy tym nóg ani nie demolując piaskownicy) i środek masy całej trójki pozostawał w tym czasie nieruchomy, wykazać, że środek ten pokrywał się z punktem przecięcia środkowych piaskownicy.
Rozwiązanie na str. 16

M 945. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ leżą punkty K i L odpowiednio, takie, że $BK : KC = CL : LD$. Udowodnić, że środek masy trójkąta AKL leży na przekątnej BD.
Rozwiązanie na str. 6



Przygotował Piotr ZALEWSKI

F 541. Powłoka balonu o pojemności $V = 3\,000$ m^3, wraz z koszem, pełnym wyposażeniem i załogą ma masę $M = 500$ kg. Jaka jest średnia temperatura T powietrza w powłoce, skoro lecący w powietrzu o temperaturze $T_0 = 20°$C balon ani się nie wznosi, ani nie opada?

Przyjąć, że powietrze składa się z 78% azotu, 21% tlenu i 1% argonu, których masy atomowe wynoszą odpowiednio 14, 16 i 40 g/mol.
Rozwiązanie na str. 16

F 542. Oszacować różnicę między ciśnieniem wewnętrznym a zewnętrznym w najwyższej części balonu. Jak duża różnica prędkości jest potrzebna, aby uzyskać podobną różnicę ciśnień statycznych wynikającą z prawa Bernoulliego?
Rozwiązanie na str. 2