Klub 44

Regulamin

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (5), P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski (4), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (4), T. Józefczyk, J. Witkowski
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie):
„dwukrotni":
Z. Bartold, W. Bednorz, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni":
M. Adamaszek, W. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, K. Patkowski, M. Peczarski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Weterani **Klubu 44 F** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma, P. Gworys, A. Idzik T. Wietecha
(każdy z nich trzykrotnie osiągnął 44 punkty).

Pozostali członkowie **Klubu 44 F** (alfabetycznie):
„dwukrotni":
J. Lipkowski, J. Łazuka, P. Perkowski;
„jednokrotni":
A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach, M. Wójcicki.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/2000 upłynął 31 stycznia 2001). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n+4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M (Klubu 44 F)**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik powiększy stan swojego konta.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 403 (WT=2,01) i 404 (WT=1,25)
z numeru 6/2000

Krzysztof Zapisek	–	42,22
Bartłomiej Dyda	– 1-	41,52
Konrad Patkowski	– 1-	41,43
Bartłomiej Marczak	–	40,32
Paweł Kubit	– 1-	38,27
Andrzej Jóźwik	–	37,72
Piotr Kumor	– 5-	35,55
Zbigniew Galias	– 1-	35,12
Wojciech Maciak	–	34,30
Marian Łupieżowiec	–	34,24
Paulina Domagalska	–	34,09
Przemysław Gadziński	– 6-	33,44
Artur Arciszewski	–	32,53
Jacek Klisowski	–	30,80
Krzysztof Jasek	–	29,60
Nikodem Szpak	–	29,06
Janusz Olszewski	– 4-	28,22
Marcin Kasperski	– 2-	28,02
Witold Bednarek	– 1-	27,35
Świątosław Gal	–	27,16
Zbigniew Sewartowski	–	26,35
Adam Woryna	–	25,42
Mieczysław Jędrzejowski	–	24,99
Monika Walkowiak	–	23,37
Łukasz Kamiński	–	22,98
Witold Bednorz	– 2-	22,43
Andrzej Nagórko	–	21,10

Legenda (przykładowo): stan konta 6-33,44 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 33,44 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1998, 1999 lub 2000.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 415, 416

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2001

415. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, dla których układ równań
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{a}{x}, \qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{b}{y}, \qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{c}{z}$$
ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y, z.

416. W kartezjańskim układzie współrzędnych przestrzeni trójwymiarowej rozważamy zbiór X wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Dwa punkty zbioru X będziemy nazywać *stowarzyszonymi*, gdy sumy ich współrzędnych są równe, a ich odległość wynosi $\sqrt{2}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon X \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:
– jeśli punkt $P \in X$ ma co najmniej jedną współrzędną równą zeru, to $f(P)=0$;
– jeśli punkt $P \in X$ ma wszystkie współrzędne dodatnie, to
$$f(P)=1+\frac{1}{6}\big(f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)+f(P_4)+f(P_5)+f(P_6)\big),$$
gdzie $P_1,\ldots,P_6$ są sześcioma punktami stowarzyszonymi z P.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2000

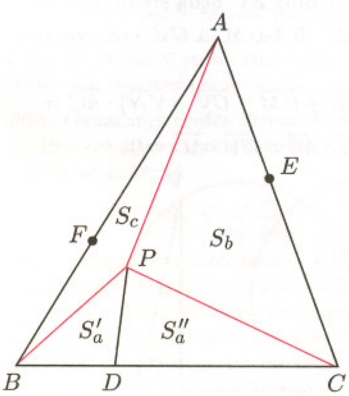
Przypominamy treść zadań:

407. Dana jest liczba naturalna n oraz n-elementowy zbiór M, zawarty w zbiorze $\{1,2,3,\ldots,2n\}$, nie zawierający żadnej pary liczb o sumie równej $2n+1$. Suma wszystkich liczb ze zbioru M jest znana i wynosi S. Obliczyć sumę kwadratów wszystkich liczb ze zbioru M.

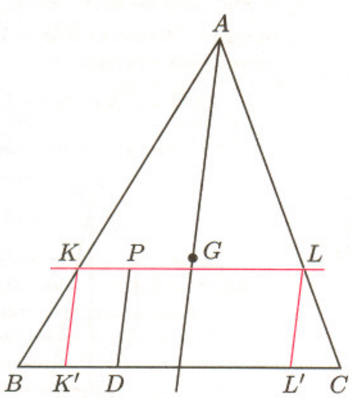
408. Przez punkt P, leżący wewnątrz trójkąta ABC o środku ciężkości G, prowadzimy proste PD, PE, PF równoległe odpowiednio do prostych AG, BG, CG; punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Wykazać, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od położenia punktu P.

407. Zbiór M składa się z n liczb – po jednym elemencie z każdej pary $\{i,\,2n+1-i\}$, $i=1,\ldots,n$. Równoważnie: po jednym elemencie z każdej pary $\{m-(m-i),\ m+(m-i)\}$, gdzie $m=n+\frac{1}{2}$. Tak więc $M=\{x_1,\ldots,x_n\}$,
$$x_i=m+\varepsilon_i(m-i), \qquad \varepsilon_i\in\{-1,+1\} \quad \text{dla } i=1,\ldots,n.$$
Wartość sumy $\sum x_i = nm+\sum\varepsilon_i(m-i)=S$ jest znana. Obliczamy sumę kwadratów:
$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= nm^2+2m\sum\varepsilon_i(m-i)+\sum(m-i)^2=\\ &= nm^2+2m(S-nm)+nm^2-2m\sum i+\sum i^2=\\ &= 2mS-2m\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$
Po podstawieniu $m=n+\frac{1}{2}$ otrzymane wyrażenie upraszcza się do postaci
$$\sum x_i^2=(2n+1)\big(S-\tfrac{1}{3}n(n+1)\big).$$

408. Przyjmijmy oznaczenia (rys. 1): pole$(ABC)=S$,
$$\begin{aligned}&\text{pole}(PBC)=S_a, \quad &&\text{pole}(PBD)=S_a', \quad &&\text{pole}(PCD)=S_a'',\\ &\text{pole}(PCA)=S_b, &&\text{pole}(PCE)=S_b', &&\text{pole}(PAE)=S_b'',\\ &\text{pole}(PAB)=S_c, &&\text{pole}(PAF)=S_c', &&\text{pole}(PBF)=S_c''.\end{aligned}$$
Przez punkt P prowadzimy prostą równoległą do BC, przecinającą boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Zauważamy proporcje (rys. 2):
$$\frac{S_b}{S}=\frac{PL}{BC}, \qquad \frac{S_c}{S}=\frac{PK}{BC}, \qquad \frac{S_a'}{S_a}=\frac{BD}{BC}, \qquad \frac{S_a''}{S_a}=\frac{CD}{BC}.$$
Niech K' i L' będą punktami boku BC otrzymanymi przez rzutowanie punktów K i L w kierunku równoległym do AG. Prosta AG połowi każdy z odcinków KL, $K'L'$, BC, więc $BD-CD=K'D-L'D=PK-PL$. Stąd
$$S_a'-S_a''=S_a\cdot\frac{BD-CD}{BC}=S_a\cdot\frac{PK-PL}{BC}=\frac{S_a(S_c-S_b)}{S}.$$
Analogicznie,
$$S_b'-S_b''=\frac{S_b(S_a-S_c)}{S}, \qquad S_c'-S_c''=\frac{S_c(S_b-S_a)}{S},$$
i po dodaniu stronami: $(S_a'+S_b'+S_c')-(S_a''+S_b''+S_c'')=0$. Oczywiście suma tych sześciu pól jest równa S. Zatem wartość sumy $S_a'+S_b'+S_c'$ jest stała, równa $S/2$, niezależnie od wyboru punktu P.



Rys. 1



Rys. 2

Od czasu do czasu spotykamy się z zapytaniem: skąd się biorą zadania Klubu 44? Blisko połowa (prawie wszystkie o numerach parzystych) to, jak wiadomo, propozycje uczestników ligi; o nich za chwilę. Pozostałe proponuje prowadzący ligę. Proponuje – to nie znaczy, że wymyśla; własnego autorstwa jest jedynie pewien ułamek ogólnej liczby zadań. Dalszą część stanowią „produkty uboczne" pracy naukowej zaprzyjaźnionych matematyków. Większa część zadań to rezultat pasożytowania na materiałach z rozmaitych konkursów matematycznych, które się odbywają na świecie. Najczęściej są to przetworzenia, „wariacje na temat", lub też zadania optycznie niepodobne do prawzorów, choć przez nie inspirowane. Nic więc dziwnego, że uczestnicy ligi czasami przysyłają tekścik: *rozwiązanie znajduje się* itd. Zabawne, że wskazywane źródła często są zupełnie inne niż te, do których zaglądał redaktor ligi...; cóż, zadania krążą po świecie.

Zadania proponowane przez Czytelników są z pewnością w znacznej części autorskie, ale również wiele z nich to zapożyczenia i przeróbki. Otóż właśnie w ostatnim roku ligowym trafiło się kilka takich przypadków – wśród zadań proponowanych i przez redaktora ligi, i przez jej uczestników. (Najskuteczniejszy w wyłapywaniu takich sytuacji okazał się **Zbigniew Skalik**.) Zostały wskazane odsyłacze do znajdujących się w literaturze rozwiązań zadań 385, 386, 388, 398 i 404 – takich samych lub bardzo podobnych (zadanie 404 okazało się znanym twierdzeniem analizy kombinatorycznej, zamieszczanym w monografiach).

Do Czytelników proponujących zadania nie w pełni oryginalne kierujemy więc gorącą prośbę o podawanie, skąd zaczerpnięte zostało zadanie (lub jego bezpośredni wzorzec). Jeśli ze znanej i łatwo dostępnej książki lub czasopisma, a proponowane jest w wersji nieprzetworzonej, to nie jest to dobry materiał na zadanie ligowe.

Jak przed rokiem, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie kilku członków Klubu 44 M, którym czas na to pozwolił. Była, jak zwykle, sesja „szybkiego rozwiązywania zadań", otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez IV Festiwalu Nauki.

Przystępujemy do corocznego omówienia wybranych zadań: prezentujemy rozwiązania zgrabniejsze od firmowych, ciekawe uogólnienia; no i patrzymy, które zadania okazały się najtrudniejsze (minimalne liczby poprawnych rozwiązań).

* * * * *

Zadanie **389.** [Pełny turniej („każdy z każdym") bez remisów; dokładnie jeden zawodnik pokonał wszystkich innych bezpośrednio ($a \to c$) lub pośrednio ($a \to b \to c$) $\Rightarrow$ faktycznie pokonał wszystkich bezpośrednio] (współczynnik trudności $WT = 2{,}37$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 11$). Niech $T_{n,k}$ oznacza turniej z udziałem n zawodników, gdy jest wśród nich dokładnie k graczy, z których każdy pokonał wszystkich innych bezpośrednio lub pośrednio. Dla jakich par liczb naturalnych (n, k) ($n \geq 2$, $n \geq k$) turniej $T_{n,k}$ jest możliwy? Takie interesujące zagadnienie analizuje **M. Peczarski** i dowodzi (stosując podwójny schemat indukcyjny), że jedyne pary (n, k), dla których turniej $T_{n,k}$ nie jest możliwy, to $(4, 4)$ oraz $(n, 2)$. Ponadto wyznacza liczby nieizomorficznych turniejów $T_{n,k}$ dla $n \leq 5$ oraz wykazuje, że gdy $k = 3$, to ta trójka graczy tworzy cykl.

Zadanie **393.** [Losowanie m różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2000\}$; dla jakich m suma tych liczb dzieli się przez 5 z prawdopodobieństwem dokładnie 1/5?] (WT=3,13; LPR=6). Liczba 2000 pojawiła się oczywiście dla uczczenia roku milenijnego; jedyną jej istotną tu własnością jest podzielność przez 5.

Typowe uogólnienie: dane liczby naturalne $n \geq m$ oraz p – ustalony nieparzysty dzielnik pierwszy liczby n; dla $r \in \{0, 1, \ldots, p{-}1\}$ niech S_r będzie liczbą m-elementowych zbiorów $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że $\sum x_i \equiv r \pmod p$. Teza:

– jeśli $p \nmid m$, to $S_0 = S_1 = \ldots = S_{p-1}$ (więc $S_0 = \frac{1}{p}\binom{n}{m}$);

– jeśli $p \mid m$, to $S_0 > S_1 = \ldots = S_{p-1}$ (więc $S_0 > \frac{1}{p}\binom{n}{m}$).

P. Kumor, **J. Łazuka**, **T. Wietecha** uzyskują te związki dla $p = 5$, a **M. Peczarski**, **A. Woryna** dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$, wraz ze wzorem (dla przypadku $p \mid m$):

$$S_0 = \frac{1}{p}\binom{n}{m} + \frac{p-1}{p}\binom{n/p}{m/p}.$$

(**M. Peczarski** rozważa także $p = 2$ i dowodzi, że ten wzór jest wówczas słuszny, jeśli $4 \mid m$; gdy natomiast $2 \mid m$, ale $4 \nmid m$, wzór zachodzi ze znakiem odejmowania zamiast dodawania.)

Metody uzasadnień stosowane przez wymienionych autorów są na ogół oparte na tej samej idei, co rozwiązanie firmowe: konstrukcja bijekcji między rodzinami podzbiorów wyznaczających różne reszty (oraz zanurzenia injektywnego dającego nierówność $S_0 > S_1$ gdy $p \mid m$).

Inną ciekawą metodę widzimy w pracy **J. Olszewskiego** (dla $n = 2000$, $p = 5$), który oblicza S_0 (bez rozpatrywania innych reszt), używając funkcji tworzącej

$$f(x, y) = \Big((1 + x)(1 + xy)(1 + xy^2)(1 + xy^3)(1 + xy^4)\Big)^{400}$$

i wykazuje, że S_0 równa się 1/5 współczynnika przy x^m w wielomianie

$$\sum_{r=0}^{4} f(x, e^{2\pi i r/5}) = (x + 1)^{2000} + 4(x^5 + 1)^{400};$$

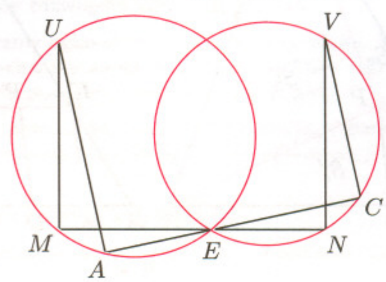
tak więc $S_0 = \frac{1}{5}\binom{2000}{m} + \delta$, gdzie $\delta = \frac{4}{5}\binom{400}{m/5}$ gdy $5 \mid m$ oraz $\delta = 0$, gdy $5 \nmid m$.

(Jest też próba uzyskania uogólnienia takiego, jak dyskutowane wyżej, bez założenia, że p jest liczbą pierwszą – ale to już nadmiar optymizmu.)

Zadanie **396.** [Dane sfery S_1, S_2 o środkach O_1, O_2 oraz punkty $A, B \in S_1$, $C, D \in S_2$, $E, F \in S_1 \cap S_2$; $E \in \overline{AC}$, $F \in \overline{BD}$; $BD \| O_1O_2 \Rightarrow$ rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają tę samą długość] (WT=3,30; LPR=6). Rozwiązanie czysto geometryczne, zbliżone do firmowego, podali **K. Patkowski** oraz **M. Peczarski**, który ponadto dołączył rozwiązanie analityczne (we współrzędnych kartezjańskich). **T. Wietecha**, **A. Woryna**, **Ł. Kamiński** i **J. Łazuka** stosują rachunek na wektorach. Przytoczymy w skrócie zgrabne rozumowanie **T. Wietechy**:

Teza zadania jest równoważna równości $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}$. Obracamy odcinek BD wokół prostej O_1O_2 do położenia MN tak, by punkt F przeszedł na E; wtedy $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ND}$, zatem $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CN}$ i należy wykazać, że $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CN}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Przecinające się w punkcie E odcinki AC i MN wyznaczają płaszczyznę, która w przekroju ze sferami S_1 i S_2 tworzy okręgi o środkach leżących na prostej równoległej do MN. Niech EU oraz EV będą średnicami tych okręgów. Wówczas $\overrightarrow{UM} = \overrightarrow{VN}$, $UA \perp AC \perp CV$ i otrzymujemy dowodzoną równość

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CN}) \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{UM} - \overrightarrow{CV} - \overrightarrow{VN}) \cdot \overrightarrow{AC} = \\ = \overrightarrow{AU} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$



Zadanie **400.** [Wyznaczyć wszystkie pary funkcji f, $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ klasy C^2: $(fg)'=f'g'$, $(fg)''=f''g''$, $fg\not\equiv \text{const}$] ($WT$=2,90; LPR=4 (6 ?)). Jest to układ dwóch równań różniczkowych. Zastosowanie mniej lub bardziej standardowych przekształceń i podstawień prowadzi do wyznaczenia dwóch rodzin rozwiązań:

$$\begin{cases} f(x)=Ae^{px}\\ g(x)=Be^{qx}\end{cases}\quad\text{oraz}\quad\begin{cases} f(x)=A(e^{2x}-C)\\ g(x)=B(e^{2x}+C)\end{cases}\quad\text{dla}\quad x\in\mathbf{R};$$

A, B, C, p, q – stałe $\neq 0$, $p+q=pq$. W trakcie przekształceń pojawia się konieczność dzielenia przez czynniki, które mogą przyjmować wartość zero; ponadto w pewnym momencie dochodzi się do równania postaci $(\ldots)(\ldots)\equiv 0$, skąd wniosek, że jeden z czynników jest zerem – zgoda; ale dla pewnych x może to być pierwszy czynnik, a dla innych drugi. Istotna trudność polega na konieczności kontrolowania przedziałów, w których spełnione są uzyskiwane w kolejnych krokach równania, i na wykazaniu, że podane wyżej wzory przedstawiają *ogólne* rozwiązanie w przedziale $(-\infty;+\infty)$; bez tego wyniki mają jedynie charakter lokalny.

Trudność „globalizacji" bez zastrzeżeń pokonali **P. Kumor** i **A. Woryna**, a z drobnymi lukami – **M. Peczarski** i **J. Olszewski**. Ponadto **M. Adamaszek** i **J. Łazuka** bezbłędnie wykonali rachunki i wyprowadzili powyższe wzory, pomijając analizowanie ich dziedziny.

Zadanie **401.** [$a,n\in\{2,3,4,\ldots\}$; każdy dzielnik pierwszy liczby a^n-1 jest dzielnikiem liczby $a-1\Rightarrow a,n=\,?$] (WT=2,54; LPR=8). Rozwiązanie firmowe było nadmiernie skomplikowane. Prościej: weźmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby n. Mamy równość

$$a^p-1=\big((a-1)+1\big)^p-1=\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(a-1)^j=(a-1)\cdot K,$$

gdzie

$$(*)\qquad K=p+(a-1)\sum_{j=2}^{p}\binom{p}{j}(a-1)^{j-2}\qquad(\text{widać, że } K>p).$$

Każdy dzielnik pierwszy liczby K jest też dzielnikiem liczby a^p-1, więc i liczby a^n-1, więc i liczby $a-1$, i wobec równości $(*)$ musi być równy p. Zatem $K=p^m$ (gdzie $m\geq 2$) oraz $p\mid a-1$. Jeżeli $p\geq 3$, to wszystkie składniki prawej strony wzoru $(*)$, z wyjątkiem początkowego „p", dzielą się przez p^2; sprzeczność.

Tak więc $p=2$, i w konsekwencji $n=2^k$. Jeśli $k\geq 2$, to liczba a^n-1 dzieli się przez liczbę a^2+1, której każdy dzielnik pierwszy musi być wobec tego dzielnikiem liczby $a-1$, więc i a^2-1; kolejna sprzeczność, bo a^2+1 (dla $a>1$) nie jest potęgą dwójki. Stąd $k=1$, czyli $n=2$, oraz $K=2^m=(a^2-1)/(a-1)=a+1$, czyli $a=2^m-1$.

To zgrabne rozwiązanie podali **W. Bednorz** i **P. Kumor**; także **M. Peczarski**, który zamiast wzoru $(*)$ zastosował przedstawienie $K=p+(a-1)\sum_{j=1}^{p-1}(p-j)a^{j-1}$. Praktycznie to samo rozumowanie, chociaż nie w tak zwięzłej formie, podali **J. Łazuka** i **K. Rałowska**; a dość podobne – **A. Woryna**. Dowody bardziej zawiłe (ale wciąż chyba prostsze od rozwiązania firmowego) przedstawili **B. Marczak** oraz **J. Olszewski**, który ponadto dostrzegł proste uogólnienie: jeżeli $a>b\geq 1$, $n\geq 2$, $\mathrm{NWD}(a,b)=1$ oraz każdy dzielnik pierwszy liczby a^n-b^n jest dzielnikiem liczby $a-b$, to $n=2$ oraz $\exists\, m\colon a+b=2^m$.

Zadania z fizyki nr 312, 313

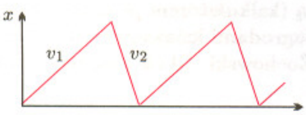
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2001

312. Równia pochyła o kącie nachylenia α spoczywała na poziomej powierzchni, a na niej położono klocek o masie znacznie większej niż masa równi. Współczynnik tarcia między równią a klockiem wynosi f_1, a między równią a podłożem – f_2. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby równia ruszyła z miejsca? Jeśli ten warunek jest spełniony, to ile wynosi przyspieszenie równi?

313. Fala dźwiękowa biegnie w atmosferze Ziemi (lub innej planety) w górę, przechodząc kolejno przez warstwy coraz bardziej rozrzedzone. Co się stanie z energią tej fali, gdy gęstość będzie znikomo mała (praktycznie rzecz biorąc, będzie to już próżnia)?

Zadanie ma charakter otwarty i możliwe są różne odpowiedzi. Cenione będą staranne uzasadnienia, a w optymalnym przypadku – obliczenia wskazujące, przy jakiej gęstości omawiany mechanizm pochłaniania lub odbicia dźwięku zaczyna być istotny.

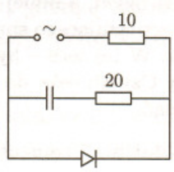


Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2000

Przypominamy treść zadań:

304. Poziomy stół wykonuje okresowy ruch poziomy według wykresu (rys. 1). Jeśli na tym stole położymy klocek i zaczekamy odpowiednio długo, to jak będzie zależeć jego średnia prędkość przemieszczania się od współczynnika tarcia μ, okresu T ruchu stołu oraz prędkości ruchu jednostajnego stołu v_1 i v_2?



Rys. 2

305. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0=30$ V przyłączono obwód składający się z diody (doskonałej, tzn. o zerowym oporze w kierunku przewodzenia i nieskończonym oporze w kierunku zaporowym), oporników 10 Ω i 20 Ω oraz kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Do jakiego napięcia naładuje się kondensator po długim czasie? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.

304. Oznaczmy części okresu T, w których stół porusza się wzdłuż osi x ze zwrotem dodatnim i ujemnym, przez T_1 i T_2. Łatwo wyznaczyć

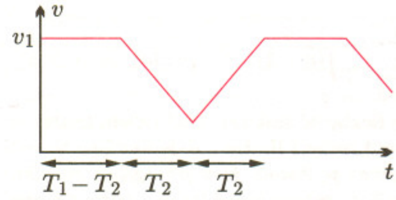
$$T_1=\frac{Tv_2}{v_1+v_2},\qquad T_2=\frac{Tv_1}{v_1+v_2}.$$

Jeśli w ciągu obu tych czasów klocek zdąży zatrzymać się względem stołu, to jego ruch względny składa się z odcinków spoczynku przeplatanego na przemian odcinkami ruchu jednostajnie opóźnionego w lewo i w prawo z tym samym przyspieszeniem $a=\mu g$ i tą samą prędkością początkową równą zmianie prędkości stołu, czyli v_1+v_2. Zatem jego średnia prędkość (zarówno względem stołu, jak i względem ziemi) jest równa zeru. Tak jest wtedy, gdy czas niezbędny do zmiany prędkości o v_1+v_2 jest mniejszy zarówno od T_1, jak i od T_2:

$$v_1+v_2<aT_1,\qquad v_1+v_2<aT_2,$$

czyli $(v_1+v_2)^2<aTv_2$, $(v_1+v_2)^2<aTv_1$. Jeśli natomiast jeden z tych warunków nie jest spełniony (np. drugi; załóżmy, że $v_1<v_2$), to po zakończeniu odcinka spoczynku względem stołu poruszającego się z prędkością v_1 przez cały czas T_2 klocek będzie poruszał się z przyspieszeniem a o zwrocie ujemnym – zatem powrót do prędkości v_1 potrwa tak samo długo, a wykres prędkości względem ziemi będzie miał postać przedstawioną na rysunku 3. Obliczenie średniej prędkości jest nietrudne i daje wynik

$$v_{\text{śr}}=v_1-aT\left(\frac{v_1}{v_1+v_2}\right)^2.$$



Rys. 3

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 301 zadaniach

Jarosław Łazuka	– Warszawa	2- 43,43
Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Marek Wójcicki	– Szczecin	1- 35,68
Aleksander Surma	– Myszków	3- 33,68
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 33,36
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	3- 27,70
Artur Arciszewski	– Kielce	26,43
Tomasz Rudny	– Warszawa	25,20
Grzegorz Miłoś	– Mielec	24,40
Marian Łupieżowic	– Zebrzydowice	12,99
Jacek Konieczny	– Poznań	10,86
Tomasz Wietecha	– Tarnów	3- 8,39
Marcin Misiak	– Poznań	8,16

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1998–2000 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

W zasadzie mogłaby również zachodzić sytuacja, w której klocek w żadnej chwili nie będzie spoczywał względem stołu. Jeśli jednak prędkości v_1 i v_2 nie są równe, to i czasy T_1 i T_2 nie będą równe, więc klocek stopniowo będzie się rozpędzał w kierunku dłużej trwającego ruchu stołu, dochodząc do ruchu opisanego wyżej.

305. Oznaczmy opór górnego opornika przez R_1, dolnego przez R_2, zmienne napięcie źródła przez $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ (niech dodatni znak odpowiada plusowi z prawej), a szukaną wartość napięcia na kondensatorze przez U_1 (łatwo przekonać się, że $U_1 > 0$). Ustalenie się napięcia U_1 oznacza, że ładunek kondensatora zmienia się okresowo, czyli ładunek Q_1 dopływający na kondensator przez oba oporniki w tej części okresu T, gdy $U(t) > U_1$, równa się sumie ładunku Q_2 odpływającego z kondensatora przez oba oporniki w tej części, gdy $U(t) > U_1$ (ale napięcie na diodzie pozostaje dodatnie, tzn. ma kierunek zaporowy) oraz ładunku Q_3 odpływającego z kondensatora przez R_2 w czasie, gdy prąd płynie przez diodę. Nietrudno sprawdzić, że warunkiem „otwarcia" diody jest $U(t) < -U_1R_1/R_2$. Zatem wymienione ładunki dane są wzorami

$$Q_1 = \frac{1}{R_1+R_2}\int (U(t) - U_1)\mathrm{d}t, \quad Q_2 = \frac{1}{R_1+R_2}\int (U_1 - U(t))\mathrm{d}t, \quad Q_3 = \frac{U_1}{R_2}\int \mathrm{d}t,$$

gdzie pierwsza całka obejmuje przedział, w którym wyrażenie podcałkowe jest dodatnie, druga – przedział, w którym $U_1 > U(t) > -U_1R_1/R_2$, a trzecia – przedział, w którym $U(t) < -U_1R_1/R_2$. Najprościej jest od razu wyliczyć różnicę $Q_1 - Q_2$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{2}{\omega}\frac{1}{R_1+R_2}\left(\sqrt{U_0^2 - (U_1R_1/R_2)^2} - \frac{\pi}{2}U_1 - U_1 \arcsin\left(\frac{U_1R_1}{U_0R_2}\right)\right),$$

natomiast

$$Q_3 = \frac{2}{\omega}\frac{U_1}{R_2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{U_1R_1}{U_0R_2}\right)\right).$$

Po przyrównaniu $Q_1 - Q_2 = Q_3$ podstawiamy wartości liczbowe R_1 i R_2 i numerycznie wyznaczamy $U_1 = 0{,}257U_0 = 7{,}7$ V. (Dość podobne było przed czterema laty zadanie 226.)

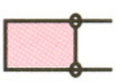
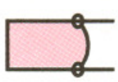
Ostatni rocznik ligi fizycznej zamknęliśmy okrągłą liczbą 301 zadań (nadmiarowa jedynka jest pamiątką po przesunięciu przerwy wakacyjnej 5 lat temu, a także „wypadnięciem" jednego zadania w numerze 6/1997). Oznacza to 151 wydań *Delty* albo około 15 lat działalności. Rocznicowe życzenia należą się wszystkim naszym korespondentom, ale w pierwszej kolejności najbardziej wytrwałym spośród nich: p. Aleksandrowi Surmie, który prawie nieprzerwanie uczestniczy w naszej lidze od samego początku, oraz niewiele mu ustępującemu p. Andrzejowi Nowogrodzkiemu, który „wystartował" od zadania 51. Ze swej strony dziękujemy za życzenia świąteczne, regularnie nadsyłane przez p. Andrzeja Idzika. Odnotujmy, że spośród siedmiu Weteranów **Klubu 44 F** właśnie p. Surma i p. Idzik są najbliżsi czterokrotnego zaliczenia 44 punktów, czego w naszym Klubie jeszcze nikomu nie udało się dokonać. Oczywiście, do udziału w naszej zabawie zapraszamy nie tylko „starych wyjadaczy", ale także (szczególnie!) nowych uczestników. Przypominamy tylko o konieczności przestrzegania terminu wysyłania rozwiązań – ostatnio kilku klubowiczów stale go przekracza, a to może powodować niezaliczenie punktów na ich koncie.

Trzeci kolejny Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki (organizowany przez redakcję *Delty* w ramach Festiwalu Nauki) zgromadził grupę młodzieży nie tylko z liceów, ale i z gimnazjów warszawskich. Pierwsze miejsce wraz z główną nagrodą (kalkulatorem programowalnym) zdobył Konrad Zakrzewski, a następne (premiowane nagrodami książkowymi) – Robert Paciorek, Gabriel Wysocki, Adam Zadrożny i Leszek Żochowski. Obok przedstawiamy najciekawsze z zadań turniejowych.

1. Zakorkowana butelka jest wypełniona wodą i tylko w szyjce pływa bąbelek powietrza. Jeśli ta butelka porusza się w dół z pewnym przyspieszeniem (zachowując pozycję korkiem do góry), to czy bąbelek: a) pozostanie w szyjce, b) opadnie na dno, c) to zależy od wartości przyspieszenia?

2. Jaś i Małgosia... a właściwie Jan i Małgorzata zgubili się w lesie i wołają o pomoc. Jeśli mają równie silne głosy (na otwartym terenie słychać ich z tej samej odległości), to czyj głos będzie lepiej słyszalny w lesie?

3. Na ramce, której nieruchoma część ma kształt prostokątny, a ruchoma jest: a) prostą poprzeczką, b) łukiem okręgu,

a)  b) 

rozpięta jest błonka mydlana. W którym przypadku trzeba działać większą siłą na część ruchomą, aby ją przesunąć w prawo?

W naszej tegorocznej korespondencji zwraca uwagę postulat p. Marcina Misiaka, aby w zadaniach było „więcej fizyki, a mniej matematyki". Chyba rzeczywiście zbyt często nasze zadania wymagają od rozwiązującego sprawności rachunkowej, a zbyt rzadko – jakościowej, logicznej analizy zjawisk. W tej serii – być może – odpowiedzią na ten postulat będzie zadanie 313; ponadto zachęcamy Czytelników do skorzystania z p. 12 regulaminu, tj. do przysyłania własnych propozycji zadań.

Oto najważniejsze uzupełnienia i komentarze wynikające z listów naszych Czytelników:

Zadanie **285.** [Prąd zmienny płynie przez opornik i zwojnicę; wyznaczyć przebieg napięcia na podstawie tabeli zależności I_{sk} od L] (współczynnik trudności $WT = 3{,}10$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). Pan A. Idzik podał rozwiązanie dopasowane do tabeli lepiej od wzorcowego, ponieważ uwzględnił aż trzy człony rozwinięcia szukanej funkcji $U(t)$ na szereg Fouriera (szereg typu $A_0 + A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(2\omega t)$) zamiast dwóch w rozwiązaniu wzorcowym. Ograniczenie się do *tylko* trzech członów tłumaczył „lenistwem" – cóż więc mogliby powiedzieć inni, w tym i prowadzący rubrykę?

Zadanie **287.** [Maksymalna energia kinetyczna elektronu powstałego z rozpadu mionu] ($WT = 1{,}83$, $LPR = 7$).

Pan T. Rudny znalazł to zadanie w zbiorku J. Jędrzejewskiego, W. Kruczka i A. Kujawskiego – ale podana jest tam odpowiedź na nieco inne pytanie, dlatego należało ją uzupełnić.

Zadanie **288.** [Dwa krążki „jojo" nawinięte na końcach nici przełożonej przez blok, warunek jednoczesnego spadania] ($WT = 2{,}46$, $LPR = 3$). Zadanie można było rozwiązać w dwóch linijkach, a rozmiary krążków nie miały najmniejszego znaczenia. Pułapka się udała – jedynym, który zauważył to już na samym początku (zresztą walcząc z wątpliwościami), był G. Miłoś, natomiast pozostali męczyli się strasznie, rozwiązując równania ruchu obrotowego. Rekordzista zapisał wzorami Lagrange'a i innymi mądrościami ponad 6 stron tekstu, otrzymując skądinąd prawidłowy wynik!

Zadanie **294.** [Minimalna prędkość koła zamachowego połączonego przegubowo z ciałem poruszającym się wzdłuż prostej] ($WT = 1{,}75$, $LPR = 3$). Pan T. Wietecha rozwiązał *analitycznie* równanie trzeciego stopnia wynikające z warunku minimalnej prędkości koła – trudno jednak powiedzieć, że dzięki zastosowaniu wzorów Cardano rozwiązanie stało się bardziej przejrzyste. Czy w jakimkolwiek problemie fizycznym wzory te spełniają kryterium praktycznej użyteczności? Pozostałe bezbłędne rozwiązania – A. Idzik i M. Wójcicki.

Czerwone na niebieskie

Ewa CZUCHRY

W dielektrykach indukcja elektryczna **D** dana jest wzorem

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P},$$

gdzie **P** oznacza wektor polaryzacji elektrycznej, a **E** natężenie zewnętrznego pola elektrycznego, ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Polaryzacja wiąże się ze spowodowaną przez pole elektryczne polaryzacją cząsteczek, tzn. kierunkiem ich ustawienia w stosunku do linii pola. Zależność wielkości polaryzacji, opisujacej, jak duża część cząsteczek zmienia kierunek ustawienia pod wpływem pola elektrycznego, od wielkości tego pola, jest opisywana ogólnie jakąś funkcją **f**

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{E}).$$

Dla uproszczenia załóżmy, że kierunek rozchodzenia się fali oraz kierunek wektora pola elektrycznego są ustalone. Pozwala to nam zapisać zależność polaryzacji P od natężenia pola E w postaci

$$P = aE + bE^2 + cE^3 + \ldots,$$

gdzie a, b, c, ... to pewne kolejne współczynniki rozwinięcia. Dla małych natężeń pola elektrycznego ważny jest tylko pierwszy, liniowy składnik, zależny od współczynnika a. W niektórych rodzajach substancji można dla odpowiednio dużych natężeń zaobserwować wpływ drugiego i wyższych czynników. Jeden z ciekawszych (i obserwowanych) efektów daje współczynnik kwadratowy – czemu się właśnie chcemy przyjrzeć. Załóżmy więc, że mamy do czynienia z dielektrykiem kwadratowym, tzn. takim, w którym zachodzi związek $P = aE + bE^2$, umieszczonym w polu elektrycznym fali elektromagnetycznej o częstości ω

$$E = E_0\cos(\omega t - kx),$$

gdzie x jest jednowymiarową współrzędną, a k stałą propagacji, związaną z długością fal λ zależnością: $k = 2\pi\lambda$. Wewnątrz dielektryka wyindukuje się pole polaryzacji

$$P = aE_0\cos(\omega t - kx) + bE_0^2\cos^2(\omega t - kx).$$

Przekształcając $\cos^2(\omega t - kx)$ następująco

$$\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - 2kx) + 1),$$

otrzymujemy, że

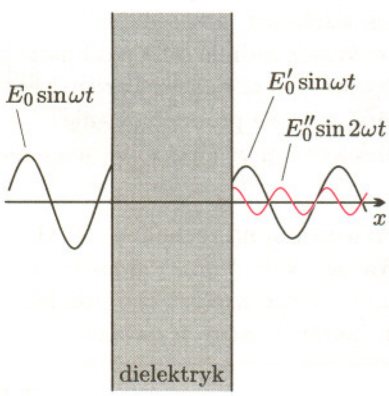
$$P = aE_0\cos(\omega t - kx) + \frac{1}{2}bE_0^2\cos(2\omega t - 2kx) + \frac{1}{2}bE_0^2.$$

Widzimy, że pole polaryzacji można rozłożyć na trzy składowe: podstawową o częstości ω, „drugą harmoniczną” o częstości 2ω i stałą. Najbardziej nas w tej chwili interesuje człon odpowiadający drugiej harmonicznej

$$P_{\mathrm{II}} = P_0^{\mathrm{II}}\cos(2\omega t - 2kx).$$

Jest to fala polaryzacji o częstości 2ω i długości $\frac{1}{2}\lambda$. Propagując się w ośrodku, fala ta indukuje falę elektromagnetyczną o tej samej częstości 2ω, ale (z powodu dyspersji równej zeru) innej stałej propagacji k'

$$\cos(2\omega t - k'x).$$



Druga harmoniczna została wytworzona po raz pierwszy w 1961 roku w krysztale kwarcu. Użyto wtedy lasera rubinowego o mocy 10 kW. W początkowej wiązce światła o długości fali $\lambda_1 = 694{,}3$ nm (barwa czerwona) otrzymano małą domieszkę drugiej harmonicznej o długości fali $\lambda_2 = 347{,}2$ nm (nadfiolet). W tym pierwszym eksperymencie wydajność wynosiła 10^{-8}, obecnie uzyskuje się wielkości rzędu 0,2, a doświadczenie jest wykonywane powszechnie w wielu laboratoriach. Lasery czerwone są z wielu powodów dużo praktyczniejsze od niebieskich, metoda powyższa pozwala więc z dobrą wydajnością uzyskiwać w laboratorium światło niebieskie, potrzebne w innych doświadczeniach.