Drobiazgi

Witold BEDNAREK

1. Jeśli A, B, C oznaczają cyfry dziesiętne i $C = A + B$, to

$$\frac{A\overbrace{CC\ldots CC}^{n \text{ cyfr}}B}{B\underbrace{CC\ldots CC}_{n \text{ cyfr}}A} = \frac{AB}{BA}.$$

2. Wśród liczb

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101,\ 10101010101, \ldots$$

tylko 101 jest pierwsza.

3. Liczba postaci $\underbrace{99\ldots99}_{n \text{ cyfr}}$, poza przypadkiem $n = 1$, nie jest potęgą liczby naturalnej.

4. Są trzy przypadki, dla których pierwiastek n-tego stopnia z liczby naturalnej n-cyfrowej jest równy sumie cyfr tej liczby:

$$\sqrt[2]{81} = 8 + 1, \qquad \sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2, \qquad \sqrt[4]{2401} = 2 + 4 + 0 + 1.$$

5. Niech A_n będzie liczbą utworzoną z n ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $5^{2^{n-1}}$. Iloczyn dwóch liczb naturalnych kończących się w zapisie dziesiętnym na A_n kończy się również na A_n. Można obliczyć, że końcówki niezmiennicze przy mnożeniu wynoszą odpowiednio: $A_1 = 5$, $A_2 = 25$, $A_3 = 625$, $A_4 = 0625$, $A_5 = 90625$, itd. Podobną własność mają końcówki $B_n = 10^n + 1 - A_n$. W tym przypadku $B_1 = 6$, $B_2 = 76$, $B_3 = 376$, $B_4 = 9376$, $B_5 = 09376$, itd.

6. Równanie

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2 + (x+7)^2 + (x+8)^2 + (x+9)^2 + (x+10)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x i y. Można sprawdzić, że pary (x_k, y_k), określone rekurencyjnie przez

$$x_1 = -4, \qquad y_1 = 11,$$
$$x_{k+1} = 10x_k + 3y_k + 45, \qquad y_{k+1} = 33x_k + 10y_k + 165,$$

spełniają to równanie. W szczególności

$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 + 45^2 + 46^2 + 47^2 + 48^2 = 143^2.$$

7. Jeśli a jest liczbą naturalną niepodzielną ani przez 2, ani przez 5, to dla dowolnego k pewna potęga a^n kończy się cyframi $\underbrace{000\ldots00}_{k \text{ zer}}1$.

8. Jeśli (f_n) jest ciągiem Fibonacciego: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, to

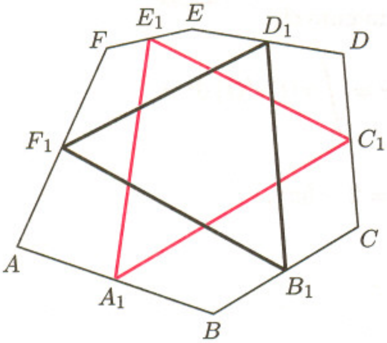
$$\operatorname{arcctg} f_{2n+1} + \operatorname{arcctg} f_{2n+2} = \operatorname{arcctg} f_{2n}.$$

9. Jeśli dwa rosnące ciągi arytmetyczne liczb naturalnych mają wspólny wyraz, to ciągi te mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

10.

$$\underbrace{11\ldots11}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{22\ldots22}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{33\ldots33}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{33\ldots34}_{n \text{ cyfr}}, \qquad \underbrace{44\ldots44}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{22\ldots22}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{66\ldots66}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{66\ldots67}_{n \text{ cyfr}}.$$

Rozwiązanie zadania M 943.
Umieśćmy w wierzchołkach sześciokąta masy jednostkowe i niech O będzie środkiem masy takiego układu. Ponieważ A_1, C_1 i E_1 są środkami masy par punktów materialnych (A, B), (C, D) i (E, F), więc O jest środkiem masy trzech punktów materialnych o masach 2 umieszczonych w punktach A_1, C_1 i E_1, a więc jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $A_1C_1E_1$ (łatwe ćwiczenie). Analogicznie wykazujemy, że O jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $B_1D_1F_1$.



Rozwiązanie zadania M 945.
Niech $k = BK/BC = 1 - (DL/DC)$ i niech A', B', K' i L' będą rzutami prostokątnymi punktów A, B, K i L odpowiednio na prostą prostopadłą do przekątnej BD. Wtedy $B'K' + B'L' = kA'B' + (1-k)A'B' = A'B'$. Tak więc środek masy punktów A', K', L' jest punktem B'. Pozostaje jeszcze zauważyć, że przy rzutowaniu prostokątnym środek masy przechodzi na środek masy.