BD+36°2147, z paralaksą 0″,402, też nie ma w spisie Hipparcosa zawierającym najbliższe 173 gwiazdy o paralaksach równych lub większych od 0″,4 – widocznie jej paralaksa okazała się mniejsza. W sumie w tym spisie Hipparcosa gwiazd odległych najwyżej o 2,5 pc są tylko trzy gwiazdy jaśniejsze od 10 mag: dwa Tolimany i Gwiazda Barnarda. Jeśli otoczenie Słońca jest dość typowe, to w Galaktyce występuje bardzo wiele gwiazd znacznie słabszych od Słońca.

Odległości większe, międzygalaktyczne, wyznacza się pośrednio np. przez porównanie jasności obserwowanej i absolutnej najjaśniejszych gwiazd w galaktykach. Takimi „dobrymi” do tego celu, bo rzeczywiście jasnymi gwiazdami, są cefeidy, szczególnego rodzaju gwiazdy zmienne pulsujące. Ich jasności absolutne zależą od okresu zmian jasności, który łatwo jest zmierzyć. Ta zależność okres-jasność została kiedyś wyskalowana na podstawie cefeid należących do Obłoków Magellana, jednak odległość Obłoków musiała być już znana uprzednio i była znana, niestety, niezbyt dokładnie. W rezultacie fotometryczna skala odległości nie jest tak dokładna, jak astronomowie chcieliby, a to dlatego, że najbliższe cefeidy są zbyt odległe, by ich odległość dało się wyznaczyć z zadowalającą dokładnością. Hipparcos wprawdzie wyznaczył paralaksy niemal 300 cefeid, gwiazdy te leżą jednak dość daleko, a wtedy ich paralaksy, ocenione formalnie np. na 0″,002 i mniej, wyznaczane są już ze sporym błędem. Jedynie trzy cefeidy mają paralaksy wyznaczone z błędem mniejszym od 10% (najbliższą jest Gwiazda Polarna o paralaksie 0″,007). Dlatego tak ważne są następne projekty satelitów zdolnych bezpośrednimi pomiarami sięgnąć jeszcze dalej.

Zabawy z kalkulatorem (I)

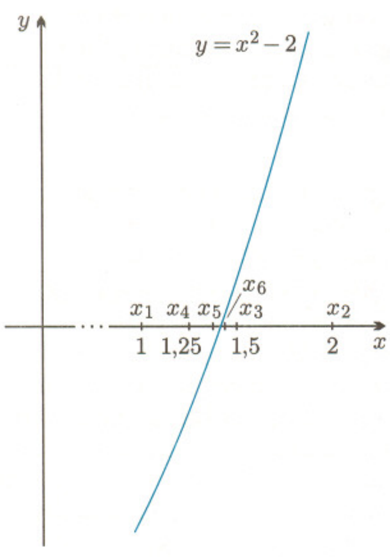
Piotr HAJŁASZ

Proponuję zabawę z kalkulatorem. Zamiast gry komputerowej. Może nie będzie aż tak fascynująca, ale wciągnąć też potrafi.

Jak znaleźć na kalkulatorze przybliżoną wartość $\sqrt{2}$, korzystając jedynie z dodawania, mnożenia i dzielenia?

Proponuję metodę prób i błędów, a raczej metodę kolejnego przybliżania się do oczekiwanego wyniku.

Popatrzmy: $1^2 < 2$, $2^2 > 2$, więc z rysunku widać, że $\sqrt{2}$ leży gdzieś między 1 i 2. Oznaczmy $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ i jako kolejnego kandydata na przybliżenie $\sqrt{2}$ weźmy punkt na środku $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 1{,}5$. Tym razem $x_3 = 2{,}25 > 2$, a więc powinniśmy szukać punktu na lewo od x_3, kładziemy więc $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3) = 1{,}25$. Skoro $x_4^2 = 1{,}5625 < 2$, więc szukamy na prawo od x_4, a mianowicie $x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + x_3) = 1{,}357$ itd.



Mam nadzieję, że procedura jest jasna. Kolejne punkty dzielą na pół przedział, do którego należy $\sqrt{2}$.

Najpierw mamy przedział $[x_1, x_2] = [1, 2]$ długości 1. Potem $[x_1, x_3] = [1, 1{,}5]$ długości 0,5. Następnie $[x_4, x_3] = [1{,}25, 1{,}5]$ długości 0,25 itd.

Na moim kalkulatorze można wyświetlić 8 cyfr, a więc $\sqrt{2}$ będzie mieć 7 cyfr po przecinku, czyli mogę podać przybliżenie $\sqrt{2}$ z dokładnością do $0{,}0\,000\,001 = 10^{-7}$. Zastanówmy się, jak dużo punktów $x_1, x_2, x_3, \ldots$ musimy znaleźć, zanim osiagniemy taką dokładność?

Długość przedziału, do którego należy $\sqrt{2}$, powinna się skrócić do długości mniejszej niż 10^{-7}. Po wyznaczeniu x_1 i x_2 mieliśmy przedział długości 1; po wyznaczeniu x_3 przedział długości $1/2 = 0{,}5$; po x_4 przedział długości $1/2^2 = 0{,}25$; po x_5 przedział długości $1/2^3$. Stąd już łatwo odczytać zależność: po wyznaczeniu x_n będziemy mieć przedział długości $1/2^{n-2}$.

Poniżej podajemy wartości liczb x_1, x_2, x_3, x_4, ... Dla zwięzłości będziemy używać pewnych skrótów w zapisie. I tak, na przykład, napis

$$x_{12}\,\{11, 9\} = 1{,}415039 \ \uparrow$$

będzie oznaczać, że $x_{12} = \frac{1}{2}(x_{11} + x_9)$, a strzałka do góry $\uparrow$, że $x_{12}^2 > 2$. Strzałka w dół $\downarrow$ przy x_{15} będzie oznaczać, że $x_{15}^2 < 2$.

$$x_1 = 1 \downarrow$$
$$x_2 = 2 \uparrow$$
$$x_3\{1, 2\} = 1{,}5 \uparrow$$
$$x_4\{3, 1\} = 1{,}25 \downarrow$$
$$x_5\{4, 3\} = 1{,}375 \downarrow$$
$$x_6\{5, 3\} = 1{,}4375 \uparrow$$
$$x_7\{6, 5\} = 1{,}40625 \downarrow$$
$$x_8\{7, 6\} = 1{,}421875 \uparrow$$
$$x_9\{8, 7\} = 1{,}4140625 \downarrow$$
$$x_{10}\{9, 8\} = 1{,}4179687 \uparrow$$
$$x_{11}\{10, 9\} = 1{,}4160156 \uparrow$$
$$x_{12}\{11, 9\} = 1{,}415039 \uparrow$$
$$x_{13}\{12, 9\} = 1{,}4145507 \uparrow$$
$$x_{14}\{13, 9\} = 1{,}4143066 \uparrow$$
$$x_{15}\{14, 9\} = 1{,}4141845 \downarrow$$
$$x_{16}\{15, 14\} = 1{,}4142455 \uparrow$$
$$x_{17}\{16, 15\} = 1{,}414215 \uparrow$$
$$x_{18}\{17, 15\} = 1{,}4141997 \downarrow$$
$$x_{19}\{18, 17\} = 1{,}4142073 \downarrow$$
$$x_{20}\{19, 17\} = 1{,}4142111 \downarrow$$
$$x_{21}\{20, 17\} = 1{,}414213 \downarrow$$
$$x_{22}\{21, 17\} = 1{,}414214 \uparrow$$
$$x_{23}\{22, 21\} = 1{,}4142135 \downarrow$$
$$x_{24}\{23, 22\} = 1{,}4142137 \uparrow$$
$$x_{25}\{24, 23\} = 1{,}4142136 \uparrow$$
$$x_{26}\{25, 23\} = 1{,}4142135 \downarrow$$

Otóż otrzymaliśmy dwie kolejne liczby x_{25} i x_{26} różniące się o 10^{-7} i takie, że $x_{25}^2 > 2$, $x_{26}^2 < 2$. A więc

$$1{,}4142135 < \sqrt{2} < 1{,}4142136$$

i nic lepszego już nie uzyskamy.

Chcemy, aby $1/2^{n-2} < 10^{-7}$, czyli $2^n > 40\,000\,000$. Mnożąc na kalkulatorze kolejno dwójki, widzimy, że

$$2^{25} = 33\,554\,432 < 40\,000\,000\,,$$
$$2^{26} = 67\,108\,864 > 40\,000\,000\,.$$

Przypuszczamy więc, że oczekiwane przybliżenie dostaniemy po znalezieniu x_{26}, czyli w 26 krokach. Wyniki kolejnych obliczeń na kalkulatorze podajemy na marginesie.

Tę samą metodę można, oczywiście, zastosować do rozwiązania innych problemów, takich jak, na przykład, znalezienie przybliżonej wartości $\sqrt[5]{7}$. Cóż, jeśli jednak nasz kalkulator wyposażony jest w funkcję obliczania pierwiastków, to powyższe zadanie można rozwiązać nieco szybciej...

Na szczęście, nawet dla bardzo zaawansowanych kalkulatorów inżynierskich łatwo jest wymyślić zadanie, którego nie da się na nim bezpośrednio rozwiązać, a które łatwo rozwiązać, stosując powyżej opisaną metodę kolejnych przybliżeń. Na przykład

Znajdź przybliżone rozwiązanie równania $2^x + x = 10$.

Ponieważ funkcja $y = 2^x + x$ jest ściśle rosnąca (bo ma dodatnią pochodną), równanie ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Podstawiając $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$, otrzymujemy kolejno wartości mniejszą i większą niż 10, co oznacza, że równanie ma (jedyne) rozwiązanie leżące pomiędzy 2 i 3. Jego przybliżoną wartość można wyznaczyć opisaną powyżej metodą kolejnych podziałów odcinka $[2, 3]$. Oczywiście, aby móc to zrobić, kalkulator musi być wyposażony w funkcję 2^x. Również i tym razem trzeba wykonać w przybliżeniu 26 kroków. To naprawdę dużo rachunków.

Cóż, nawet w przypadku znajdowania przybliżonej wartości $\sqrt{2}$ powyższa metoda prowadzi do mozolnych rachunków. Czy można znaleźć jakąś inną metodę, pozwalającą na szybsze rozwiązywanie zadań tego typu, co omawiane powyżej?

Tak, takie metody istnieją! Wymagają one użycia nieco bardziej zaawansowanych metod matematycznych. Tak to już z tą matematyką, niestety, jest. Trzeba się najpierw pomęczyć, ucząc się rzeczy, co do których nie zawsze jest jasne, po co one są, aby dopiero potem ujrzeć ich piękno i zdumiewającą użyteczność.

A propos tej użyteczności, to jak to w końcu jest z tym błyskawicznym znajdowaniem rozwiązań powyższych zadań? Cierpliwości! Ciąg dalszy w *Delcie* 3/2001.

Droga Redakcjo,

piszę ten list, gdyż jedna z informacji podanych w notce o liczbach Fermata w numerze 9/2000 (który z przyjemnością przeczytałem na tzw. obczyźnie) jest nieaktualna.

Mianowicie, wiadomo w tej chwili ponad wszelką rozsądną wątpliwość, że liczba $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ jest złożona. Panowie Richard Crandall, Ernst Mayer i Jason Papadopoulos piszą w swoim preprincie z grudnia 1999 roku, że stwierdzili ów fakt korzystając z jednej z wersji tzw. testu Pepina (konkretnie, z twierdzenia głoszącego, że liczba $F_n := 2^{2^n} + 1$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3^{(F_n-1)/2} + 1$ jest podzielna przez F_n). Potęgowanie trójki i obliczanie reszty z dzielenia zostało wykonane dwukrotnie, w sierpniu 1999 roku, za pomocą dwóch różnych programów, na dwóch różnych, fizycznie odseparowanych komputerach, z tym samym wynikiem. Jak podaje Crandall, wymagało to około 10^{17} operacji – z grubsza biorąc tyle, ile potrzeba do wykonania cyfrowej wersji pełnometrażowego filmu Disneya. Dużo, biorąc pod uwagę, że uzyskana odpowiedź składa się w istocie z jednego bitu. Żaden czynnik pierwszy F_{24} oczywiście nie jest znany.

Następną w kolejce liczbą Fermata, o której nie wiadomo, czy jest pierwsza, czy złożona, jest teraz F_{31}, która ma 646 456 994 cyfry. Natomiast największą liczbą Fermata, o której coś jednak wiadomo, jest przypuszczalnie F_{35563}: 27 sierpnia 2000 roku niejaki Nestor Sergio de Aranjo Melo dowiedział się od swego komputera, że jest to liczba złożona, podzielna przez $357 \cdot 2^{35567} + 1$.

Serdeczne pozdrowienia,

Paweł STRZELECKI

18.09.2000 r.