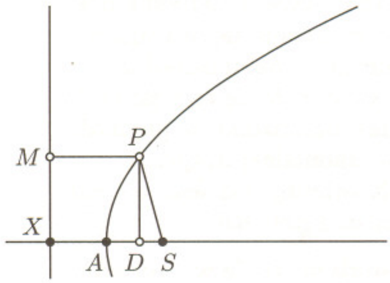
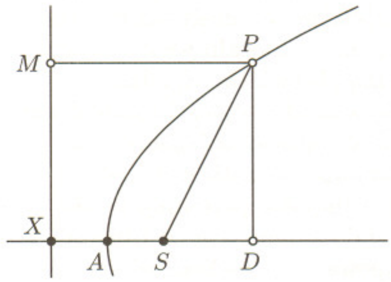
Tylko Pitagoras



Rys. 1

Parabolę można określić jako zbiór tych punktów płaszczyzny, które są jednakowo odległe od pewnego ustalonego punktu (zwanego ogniskiem) i pewnej ustalonej prostej nieprzechodzącej przez ognisko (zwanej kierownicą paraboli). Oś, czyli prosta prostopadła do kierownicy i przechodząca przez ognisko, przecina parabolę w punkcie zwanym wierzchołkiem paraboli.

Dość rozpowszechnione jest mniemanie, że ognisko jest środkiem krzywizny wierzchołka paraboli. Środek krzywizny dla jakiegoś punktu krzywej to środek okręgu najlepiej ją przybliżającego w otoczeniu tego punktu. W przypadku wierzchołka paraboli będzie to punkt jej osi położony możliwie najdalej od wierzchołka, taki jednak, że najbliższym mu punktem paraboli jest jej wierzchołek. Inaczej rzecz ujmując, chodzi o taki najdalszy punkt osi paraboli, że największe koło o środku w tym punkcie, mieszczące się między ramionami paraboli, przechodzi przez wierzchołek paraboli.



Rys. 2

Otóż środkiem krzywizny paraboli w jej wierzchołku jest punkt osi oddalony od wierzchołka dwa razy bardziej niż ognisko. I aby się o tym przekonać, nie potrzeba niczego więcej niż twierdzenie Pitagorasa. Oto ten dowód.

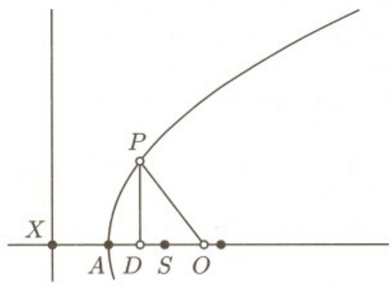
Na potrzeby tej notatki ustalmy dowolną parabolę i oznaczmy przez S jej ognisko, przez A jej wierzchołek, przez X przecięcie jej osi z kierownicą oraz dla dowolnego jej punktu P oznaczmy przez M jego rzut prostokątny na kierownicę, a przez D – na oś paraboli, wreszcie przez O oznaczmy dowolny punkt jej osi.

Najpierw udowodnimy lemat prezentujący raczej mało znaną własność paraboli.

Lemat: $PD^2 = 4AS \cdot AD$.

Dowód. Istotnie (rys. 1 lub rys. 2)

$$\begin{aligned} PD^2 &= PS^2 - DS^2 = PM^2 - DS^2 = XD^2 - DS^2 = \\ &= (AX + AD)^2 - (AS - AD)^2 = (AS + AD)^2 - (AS - AD)^2 = 4AS \cdot AD. \end{aligned}$$



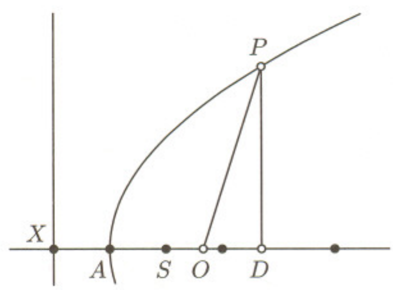
Rys. 3

Wykażemy teraz, że jeśli $AO \leq 2AS$, to najbliższym O punktem paraboli jest jej wierzchołek, czyli

Twierdzenie 1: $(AO \leq 2AS$ i $P \neq A) \Rightarrow AO < OP$.

Dowód. Istotnie, gdy $AD < AO$ (rys. 3), mamy

$$\begin{aligned} AO^2 &= (AD + OD)^2 = AD^2 + 2AD \cdot OD + OD^2 = \\ &= AD((AD + OD) + OD) + OD^2 = AD(AO + OD) + OD^2 < \\ &< AD(AO + AO) + OD^2 = 2AD \cdot AO + OD^2 \leq 4AD \cdot AS + OD^2 = \\ &= PD^2 + OD^2 = OP^2. \end{aligned}$$



Rys. 4

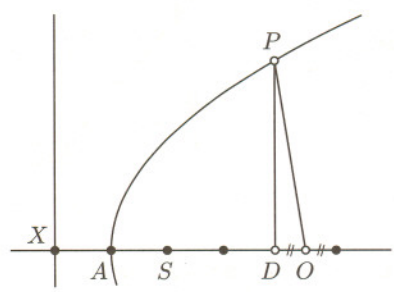
Z kolei, gdy $AD \geq AO$ (rys. 4), mamy

$$AO^2 < 2AO^2 \leq 4AS \cdot AO \leq 4AS \cdot AD = PD^2 \leq OD^2 + PD^2 = OP^2.$$

Wreszcie wykażemy, że dla punktów osi spełniających warunek $AO > 2AS$ istnieją punkty paraboli tak samo od nich odległe,

jak wierzchołek, czyli

Twierdzenie 2: $AO > 2AS \Rightarrow ($ istnieje $P \neq A: \quad AO = OP)$.



Rys. 5

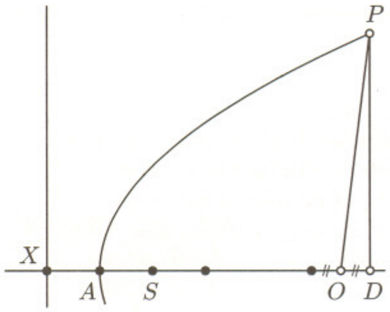
Dowód. Wskażemy taki punkt, podając odległość jego rzutu na oś od wierzchołka: $AD = 2(AO - 2AS) > 0$. Można to zapisać jako $AD = AO + (AO - 4AS)$.

Gdy $AO < 4AS$ (rys. 5), mamy $AD < AO$ i

$$OD = AO - AD = 4AS - AO.$$

Gdy z kolei $AO \geq 4AS$ (rys. 6), mamy $AD \geq AO$ i

$$OD = AD - AO = AO - 4AS.$$



Rys. 6

W obu więc przypadkach

$$\begin{aligned} OP^2 = OD^2 + PD^2 = OD^2 + 4AS \cdot AD = \\ = 16AS^2 - 8AS \cdot AO + AO^2 + 4AS \cdot AD = \\ = AO^2 + 4AS(4AS - 2AO + AD) = AO^2 + 4AS(-AD + AD) = AO^2. \end{aligned}$$

Elipsę i hiperbolę podobnie określa się za pomocą ogniska i kierownicy. W tym przypadku chodzi o punkty, których stosunek odległości od ogniska i od kierownicy jest stały; gdy ten stosunek jest mniejszy od 1 – otrzymujemy elipsę, gdy większy – hiperbolę (a gdy równy 1 – parabolę). Definicja wierzchołka i osi jest taka sama jak dla paraboli. A gdzie leżą środki krzywizny tych krzywych w ich wierzchołkach? Redakcja będzie wdzięczna Czytelnikom nie tyle za odpowiedź na to pytanie, co za wskazanie równie elementarnych dowodów odpowiednich faktów.

Wojciech GUZICKI i Marek KORDOS

W tablicach Księżycowych publikowanych w rocznikach astronomicznych znajduje się sporo luk oznaczających, że jakiegoś dnia Księżyc nie wschodzi, innego dnia nie góruje itd. Jak to możliwe? Nie zapominajmy, że Księżyc porusza się po niebie dość szybko (13°,176 na dobę) i w dodatku z zachodu na wschód. Dlatego jeżeli pewnego dnia np. górował tuż przed północą, to następne jego górowanie wypadnie tuż po północy, ale nie zaraz następnego dnia, lecz jeszcze następnego. To samo dotyczy wschodów i zachodów, stąd luki w tablicach.

Zadania

Zadania matematyczne w tym numerze dotyczą twierdzenia Pitagorasa, bo jest ono głównym narzędziem używanym na sąsiedniej stronie. Są zaczerpnięte ze zbioru W.W. Prasołowa, przez co chcemy wyrazić opinię, że ten zbiór (jak i np. zbiory zadań I.F. Szarygina) powinien być wreszcie przetłumaczony na język polski.

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 940. Okręgi o promieniach a, b, c są parami zewnętrznie styczne i wszystkie są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A, B, C, przy czym punkt C leży między punktami A i B. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 941. Na średnicy AB okręgu o dany jest punkt M. Przez M poprowadzona jest cięciwa CD przecinająca AB pod kątem 45°. Wykazać, że suma $CM^2 + DM^2$ nie zależy od wyboru punktu M.
Rozwiązanie na str. 8

M 942. Rzutami dowolnie obranego we wnętrzu trójkąta równobocznego punktu M na boki AB, BC i CA tego trójkąta są, odpowiednio, punkty P, Q, R. Wykazać, że suma zarówno pierwszych, jak i drugich, potęg długości jest taka sama dla odcinków AP, BQ, CR, jak dla odcinków PB, QC, RA.
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 539. Wyznaczyć ciśnienie w pęcherzyku powietrza o średnicy $d = 0{,}01$ mm znajdującym się 20 cm pod powierzchnią wody. Ciśnienie zewnętrzne wynosi $p_1 = 765$ mm Hg (1 mm Hg = 133 N/m^2). Napięcie powierzchniowe wody $\alpha = 0{,}073$ N/m.
Rozwiązanie na str. 13

F 540. Ze zbiornika, przez pionową rurkę o średnicy $d = 2$ mm, wycieka kropla po kropli alkohol. Znaleźć czas, po jakim wypłynie 10 g alkoholu, jeśli odstęp czasu między kapiącymi kroplami wynosi 1 s. Zakładamy, że kropla odrywa się wzdłuż wewnętrznego przekroju rurki. Napięcie powierzchniowe alkoholu $\alpha = 0{,}02$ N/m.
Rozwiązanie na str. 13