Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

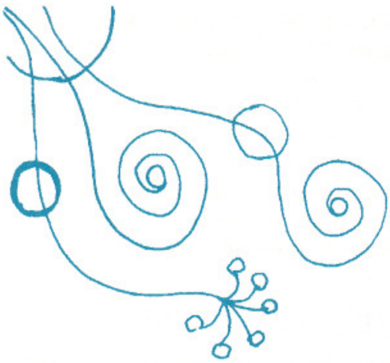
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z fizyki nr 310, 311

Redaguje Jerzy B. BROJAN



310. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α wyrzucono małe ciało z ustaloną wartością prędkości początkowej. Jaki powinien być kąt nachylenia tej prędkości do poziomu, aby: a) rzut trwał maksymalnie długo, b) zasięg rzutu był maksymalny?

311. Promieniowanie jest pochłaniane w materii zgodnie ze wzorem

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

gdzie I_0 jest natężeniem wiązki padającej, a I – natężeniem wiązki przechodzącej przez warstwę o grubości x. Jeśli parametr μ opisujący pochłanianie promieni podczerwonych ma dla pewnego materiału wartość 2 mm^{-1}, a jego współczynnik przewodnictwa cieplnego wynosi 0,2 W/(m·K), to czy słuszne jest przypuszczenie, że w temperaturze pokojowej przewodnictwo cieplne tego materiału wynika głównie z przepływu energii w formie promieniowania podczerwonego? Wystarczy odpowiedź oparta na ocenie orientacyjnej.

Wskazówka: Współczynnikiem przewodnictwa cieplnego λ nazywamy współczynnik we wzorze Fouriera

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

gdzie ΔQ jest ilością ciepła przepływającą w ciągu czasu Δt przez powierzchnię S pod wpływem różnicy temperatur ΔT między punktami odległymi o Δx wzdłuż osi prostopadłej do tej powierzchni.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2000

Przypominamy treść zadań:

302. Przewodząca kula o promieniu r składa się z dwóch zetkniętych ze sobą półkul. Jaka jest wartość siły odpychającej te dwie półkule od siebie, jeśli ładunek całej kuli wynosi Q?

303. Dwa jednakowe naczynia o ściankach nie przewodzących ciepła są połączone rurką z zaworem (kranikiem). Początkowo w jednym naczyniu znajdował się gaz pod ciśnieniem p i w temperaturze T, a w drugim naczyniu była próżnia. Otwarto zawór, tak że ciśnienia się wyrównały. Jaka będzie wtedy wartość p' ciśnienia oraz temperatur T_1 i T_2 w naczyniach? Gaz jest doskonały, a stosunek jego ciepeł właściwych wynosi $\gamma = c_p/c_v$.

302. Na kuli przewodzącej ładunek jest, oczywiście, rozłożony jednorodnie. Siła wywierana na mały element powierzchni kuli (zawierający ładunek dQ) przez resztę kuli jest równa $\mathrm{d}F = (1/2)E_{\text{zewn}}\mathrm{d}Q$, gdzie $E_{\text{zewn}} = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Aby to wykazać, można odwołać się do bilansu energii: praca wykonana przy jednoczesnym przesunięciu wszystkich tych ładunków jest równa zmianie energii danej wzorem $E = Q^2/2Cr$, gdzie $C = 4\pi\varepsilon_0 r$ jest pojemnością kuli. Składając siły działające na wszystkie elementy półkuli, należy wziąć ich składową wzdłuż odpowiedniej osi, tzn. $\mathrm{d}F_z = \mathrm{d}F\cos\theta$, a ponadto zgodnie z jednorodnym rozkładem ładunku dQ jest proporcjonalne do powierzchni dS danego elementu kuli, czyli podstawiamy $\mathrm{d}Q = Q\mathrm{d}S/(4\pi r^2) = (1/2)Q\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Całkowanie po θ od 0 do $\pi/2$ prowadzi do wyniku

$$F_z = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

303. Przepływ gazu przez kranik nie zmienia jego całkowitej energii wewnętrznej. Ponieważ dla gazu doskonałego energia wewnętrzna jest dana wzorem $U = nC_V T = (C_V/R)pV$, a objętości naczyń są jednakowe, więc z bilansu energii natychmiast otrzymujemy $p' = (1/2)p$. Zauważmy dalej, że gaz pozostający w naczyniu, w którym był początkowo, uległ przemianie adiabatycznej (drugie naczynie jest znacznie trudniejsze do analizy pod tym kątem, gdyż wpływały do niego kolejne partie gazu, których temperatura się zmieniała). W zmiennych $p-T$ równanie przemiany adiabatycznej ma postać $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const}$, zatem $T_1 = T/2^{(\gamma-1)/\gamma}$. Na koniec temperaturę drugiego naczynia T_2 można wyznaczyć z zachowania masy (liczby moli), co w naszym przypadku sprowadza się do równania

$$\frac{2}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Zadania z matematyki nr 413, 414

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2001

413. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunki $b > 2a$, $c > 2b$. Dowieść, że dla pewnej liczby dodatniej λ część ułamkowa każdego z iloczynów λa, λb, λc jest liczbą z przedziału $(1/3; 2/3)$.

(Część ułamkowa liczby x to różnica $x - [x]$, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą x.)

414. Wewnątrz wielokąta wypukłego W znajduje się taki punkt O, że każda prosta przechodząca przez O dzieli wielokąt W na dwie części o równych polach. Czy stąd wynika, że punkt O jest środkiem symetrii wielokąta W?

Zadanie **414** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 401 (WT=2,54) i 402 (WT=1,71) z numeru 5/2000

Bartłomiej Dyda	– Wrocław	41,52
Konrad Patkowski	– Gdańsk	41,43
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	39,20
Paweł Kubit	– Kraków	35,01

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2000

Przypominamy treść zadań:

405. Przez środek I okręgu wpisanego w nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC poprowadzono okręgi k_A, k_B, k_C: okrąg k_A jest mniejszym z dwóch okręgów przechodzących przez I, stycznych do prostych AB i AC; okręgi k_B i k_C są określone analogicznie. Okręgi k_B i k_C przecinają się w punktach I, P; okręgi k_C i k_A przecinają się w punktach I, Q; okręgi k_A i k_B przecinają się w punktach I, R. Dowieść, że środki okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są współliniowe.

406. Czy istnieje rosnący ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots$, w którym każdy wyraz (począwszy od drugiego) jest nie mniejszy od średniej arytmetycznej dwóch wyrazów z nim sąsiadujących?

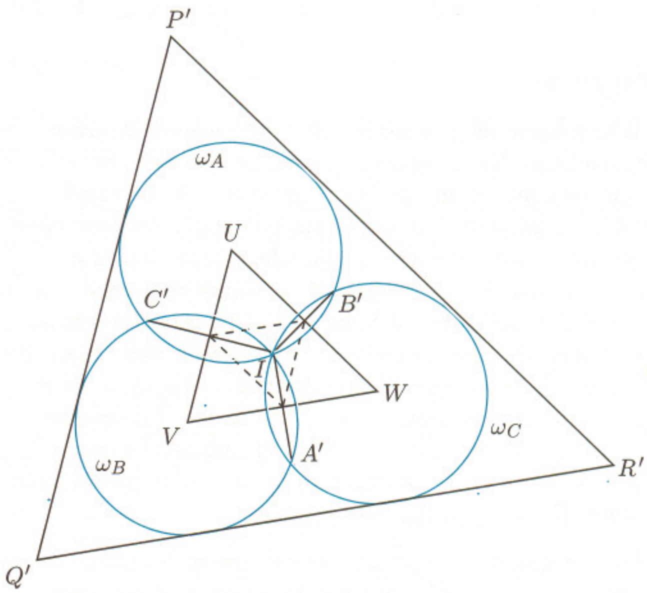
405. Założenie, że trójkąt ABC nie jest równoramienny, gwarantuje, iż trójkąty AIP, BIQ, CIR są niezdegenerowane, więc opisane na nich okręgi są dobrze określone. Wykażemy, że te okręgi mają jeszcze jeden (oprócz I) wspólny punkt J. Stąd oczywiście wyniknie, że ich środki leżą na prostej symetralnej odcinka IJ.

Stosujemy inwersję względem dowolnie ustalonego okręgu o środku I. Oznaczmy obrazy punktów A, B, C, P, Q, R odpowiednio przez A', B', C', P', Q', R'. Obrazami okręgów k_A, k_B, k_C są proste $Q'R'$, $R'P'$, $P'Q'$. Obrazami prostych BC, CA, AB są okręgi, które oznaczymy odpowiednio przez ω_A, ω_B, ω_C. Przechodzą one przez punkt I; ponadto przecinają się parami w punktach A', B', C'; każdy z tych okręgów jest styczny do dwóch boków trójkąta $P'Q'R'$. Skoro proste BC, CA, AB były jednakowo odległe od punktu I (środka inwersji), to okręgi ω_A, ω_B, ω_C mają jednakowe promienie.

Obrazami okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są proste $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$. Zadanie sprowadza się do wykazania, że te proste mają wspólny punkt.

Oznaczmy środki okręgów ω_A, ω_B, ω_C odpowiednio przez U, V, W. Ich promienie są równe, więc punkt I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie UVW. Proste IA', IB', IC' są symetralnymi jego boków; a środki boków są jednocześnie środkami odcinków IA', IB', IC'. Zatem te środki są wierzchołkami trójkąta, który jest jednocześnie jednokładny i do trójkąta UVW (w skali $-1/2$), i do trójkąta $A'B'C'$ (w skali $1/2$). Wynika stąd, że boki trójkąta $A'B'C'$ są odpowiednio równoległe do boków trójkąta UVW; te zaś są z kolei równoległe do boków trójkąta $P'Q'R'$ (wobec równości promieni okręgów ω_A, ω_B, ω_C).

Konkludując, stwierdzamy, że boki trójkątów $A'B'C'$ i $P'Q'R'$ są odpowiednio równoległe, i wobec tego trójkąty te są jednokładne. Środek owej jednokładności jest poszukiwanym punktem przecięcia prostych $A'P'$, $B'Q'$, $C'R'$.



406. Przypuśćmy, że $p_1, p_2, p_3, \ldots$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, w którym $2p_i \geq p_{i-1} + p_{i+1}$. Przyjmując $a_i = p_i - p_{i-1}$ widzimy, że $a_{i+1} \leq a_i$. Nierosnący ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest od pewnego miejsca stały: $a_i = r$ dla $i \geq i_0$. Tak więc $p_{i_0}, p_{i_0+1}, p_{i_0+2}, \ldots$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Wobec tego

$$p_{i_0+k} = p_{i_0} + kr \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dla $k = k_0 = p_{i_0}$ otrzymujemy $p_{i_0+k_0} = p_{i_0} + p_{i_0} r = p_{i_0}(1 + r)$; jest to liczba złożona. Zatem nie istnieje ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots$ o zadanej własności.