Teoria liczb w dwudziestym wieku

Władysław NARKIEWICZ

0. Teoria liczb, zajmująca się własnościami liczb całkowitych, wymiernych i ich uogólnień, obfituje w wiele problemów, które dadzą się wprawdzie prosto sformułować, ale rozwiązanie których jest zazwyczaj bardzo trudne. Kończące się stulecie przyniosło sporo rozwiązań starych zagadnień, z których najbardziej sensacyjnym było znalezienie przez Andrew Wilesa przed kilku laty dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata, o czym pisała nawet prasa codzienna. Opiszemy teraz pokrótce kilka tych zagadnień, dokonując z konieczności dość subiektywnego ich wyboru.

1. Pierwszym sławnym zagadnieniem rozstrzygniętym w XX wieku był *problem Waringa*, dotyczący przedstawień liczb naturalnych w postaci sumy nieujemnych potęg. W 1770 r. matematyk angielski, Edward Waring, napisał w swej książce *Meditationes Algebraicae*, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów (stwierdzenie to pojawiło się już w XVII w, a P. Fermat twierdził nawet, że potrafi je udowodnić), dziewięciu sześcianów, dziewiętnastu czwartych potęg itd. Zwykle uważa się, że za słowem itd. kryje się następujące sformułowanie:

Jeśli $k \geq 2$, to można znaleźć taką liczbę $g(k)$, że każda liczba naturalna da się przedstawić jako suma co najwyżej $g(k)$ k-tych potęg liczb naturalnych.

W tej postaci zagadnienie Waringa zostało rozwiązane w 1909 roku przez Dawida Hilberta, ale pozostał problem znalezienia najmniejszej wartości $g(k)$. Tu nie wszystko jest jeszcze jasne. W XVIII w. J.L. Lagrange udowodnił, że $g(2) = 4$, równość $g(3) = 9$ udowodnił w 1909 r. A. Wieferich (choć jego dowód zawierał pewne luki, później uzupełnione), natomiast równość $g(4) = 19$ została udowodniona dopiero w 1986 r. przez R. Balasubramaniana, J.M. Deshouillersa i F. Dressa. Przypuszcza się, że jeśli q jest częścią całkowitą liczby $(3/2)^k$, to $g(k) = 2^k + q - 2$. Jest to prawda dla wszystkich dostatecznie dużych k oraz dla k mniejszych od 471 milionów.

2. Innym problemem, pochodzącym z XVIII w., jest *problem Goldbacha*, sformułowany po raz pierwszy w liście Goldbacha do Eulera w 1742 r. Chodzi w nim o pokazanie, że każda liczba parzysta, większa od 2, jest sumą dwóch liczb pierwszych, każda zaś liczba nieparzysta, większa od 5, jest sumą trzech liczb pierwszych. Już w 1855 r. sprawdzono, że jest tak dla wszystkich liczb mniejszych od 10 000, a za pomocą komputerów powiększono tę granicę do $4 \cdot 10^{11}$.

W 1937 r. I.M. Winogradow wykazał, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych, a późniejsze modyfikacje jego dowodu doprowadziły do stwierdzenia, że zachodzi to dla wszystkich liczb większych od $e^{e^{9,715}}$. Niestety, liczba ta jest zbyt duża, by się dało sprawdzić za pomocą komputerów, że dla każdej mniejszej liczby nieparzystej istnieje żądane przedstawienie.

Wcześniej, bo w 1919 r., G.H. Hardy i J.E. Littlewood wykazali, że powyższe twierdzenie Winogradowa wynika z tzw. *hipotezy Riemanna*, głoszącej, że nierzeczywiste zera $x + iy$ funkcji dzeta Riemanna spełniają $x = 1/2$. Hipoteza ta jest równoważna następującej własności, w której nie pojawiają się liczby zespolone: Jeśli dla $x > 0$ i dowolnego y oznaczymy

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(y \log n)}{n^x}$$

oraz

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(y \log n)}{n^x},$$

Rozwiązanie zadania M 937.
Warunek konieczny i dostateczny: $k|n$ lub $k|m$.
Jego dostateczność jest oczywista. Załóżmy , że $k \nmid n$ i $k \nmid m$. Oznaczmy przez r_n i r_m reszty z dzielenia przez k liczb n i m odpowiednio. Możemy przyjąć, że $r_m \geq r_n > 0$. Ponumerujmy kolumny tablicy od 0 do $m-1$, wiersze od 0 do $n-1$, następnie zaś przypiszmy każdej z klatek resztę z dzielenia przez k sumy numerów jej kolumny i wiersza. Niech P_i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, oznacza zbiór wszystkich klatek, którym przypisana jest reszta i. Nietrudne rozważania prowadzą do wniosku, że dla pewnych i, j zachodzi $|P_i| = |P_j| + 1$. W tym celu wystarczy ograniczyć się do prostokąta w prawym dolnym rogu o rozmiarach $r_n \times r_m$ i przyjąć $i = r_m - 1$ oraz $j = r_m$. Każda pojedyncza operacja zmienia kolor dokładnie jednej klatki z każdego ze zbiorów P_i. Wynika z tego, że dla każdego i liczba operacji jest równa łącznej liczbie przekolorowań wszystkich klatek ze zbioru P_i. Klatka zmienia kolor, gdy liczba jej przekolorowań jest nieparzysta, z czego i z poprzedniego zdania wynika, że liczba operacji potrzebnych do przekolorowania wszystkich klatek tablicy ma taką samą parzystość jak każda z liczb $|P_i|$. Jest to jednak sprzeczne z równością $|P_i| = |P_j| + 1$.

Uwaga: Jeśli zastąpimy prostokąty typu $1 \times k$ dowolnymi $l \times k$, to też będzie niezła zabawa.

to z $f(x,y)=g(x,y)=0$ wynika $x=1/2$. Niestety, nikt nie wie do dziś, czy hipoteza Riemanna jest prawdziwa.

Przypadek liczb parzystych okazał się znacznie bardziej skomplikowany. Wiemy jedynie, że jeśli $N_2(x)$ oznacza ilość liczb parzystych mniejszych od x, które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, to $N_2(x)/x$ dąży do zera przy wzroście x, a więc znakomita większość liczb parzystych jest żądanej postaci. Ponadto wiemy (twierdzenie Chena z 1966 r.), że każda duża liczba parzysta jest albo sumą dwóch liczb pierwszych, albo sumą liczby pierwszej i liczby będącej iloczynem dwóch liczb pierwszych.

3. W 1801 r. młody Gauss postawił problem, dotyczący teorii form kwadratowych, który można sformułować w sposób zupełnie elementarny. Wiąże się on ze sławnym wielomianem x^2-x+41, znalezionym przez Eulera. Wielomian ten ma tę własność, że jego wartość jest liczbą pierwszą dla 41 kolejnych całkowitych wartości argumentu x, poczynając od $x=0$. Problem Gaussa jest równoważny następującemu pytaniu:

Czy istnieje liczba m większa od 41 o tej własności, że wielomian x^2-x+m przyjmuje dla argumentów $x=0,1,2,\ldots,m-1$ wyłącznie wartości będące liczbami pierwszymi?

Z rezultatów uzyskanych w latach 1933–34 przez M. Deuringa, L.J. Mordella i H. Heilbronna wyniknęło, że takich liczb m może być jedynie skończenie wiele, a Heilbronn i E. Linfoot wykazali następnie, iż może istnieć tylko jedna taka liczba większa od 41. Dopiero w 1967 r. H.M. Stark wykazał, że takiej liczby w ogóle nie ma.

4. W 1842 r. E. Catalan w krótkiej notatce stwierdził, że liczby $8=2^3$ i $9=3^2$ tworzą jedyną parę kolejnych potęg. Do dziś nie wiemy, czy tak jest w istocie, ale w 1976 r. R. Tijdeman potrafił dowieść, że takich par może być tylko skończenie wiele. Użył w tym celu nowej metody, stworzonej w 1966 r. przez A. Bakera (która swemu autorowi przyniosła medal Fieldsa), pozwalającej na oszacowanie od dołu niezerowych kombinacji liniowych logarytmów liczb wymiernych. Metoda ta przyczyniła się do istotnego postępu i w innych zagadnieniach teorii liczb, m.in. do istotnego uproszczenia dowodu twierdzenia Starka, o którym mówiliśmy przed chwilą.

Inny problem, dotyczący potęg liczb naturalnych, pochodzi od O. Terquema, który w 1857 r. stwierdził bez dowodu, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych nie może być potęgą. To jest zupełnie łatwe w przypadku dwu kolejnych liczb i niewiele trudniejsze w przypadku trzech, jednakże w pełnej swej ogólności problem ten okazał się bardzo trudny i został rozwiązany dopiero w 1975 r. przez P. Erdősa i J.L. Selfridge'a. Wcześniej, bo w 1939 r., Erdős i O. Rigge wykazali niezależnie, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych nie może być kwadratem. Użyte tutaj metody są zawiłe, ale w pełni elementarne, aczkolwiek w dowodzie ogólnego przypadku sporą pracę rachunkową musiał wykonać komputer.

5. W 1900 r. odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyków, gdzie Dawid Hilbert wygłosił odczyt o problemach, którymi, według niego, będą zajmowali się matematycy w dwudziestym wieku. Wśród tych problemów, obok wspomnianych wyżej problemu Goldbacha i hipotezy Riemanna, pojawiło się parę innych związanych z teorią liczb. Omówimy tutaj dwa z nich, które zostały w pełni rozstrzygnięte.

Pierwszy dotyczy liczb przestępnych. Przypomnijmy, że liczbę nazywamy algebraiczną, gdy jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, oczywiście różnego od wielomianu zerowego. Pozostałe liczby nazywają się liczbami przestępnymi. W problemie, postawionym przez Hilberta, chodziło o wykazanie, że jeśli α jest liczbą algebraiczną, różną od 0 i 1, a β jest liczbą algebraiczną niewymierną, to liczba α^β jest przestępna. Żądany dowód został znaleziony w 1935 r. niezależnie przez Aleksandra O. Gelfonda i Theodora Schneidera.

Rozwiązanie zadania F 537.

$$F_E=F_G,\ \text{czyli}\ \ k_0\frac{q_1q_2}{r^2}=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

gdzie q_1, q_2 to ładunki, a m_1, m_2 masy kulek. Stąd

$$\left(\frac{q_1}{m_1}\right)\left(\frac{q_2}{m_2}\right)=\frac{G}{k_0}.$$

Przyjmijmy, że dla obu kulek stosunek liczby elektronów do liczby protonów jest jednakowy, a więc

$$\frac{q_1}{m_1}=\sqrt{\frac{G}{k_0}}.$$

Mamy też, że

$$q_1=(N_e-N_p)e,$$

gdzie N_e i N_p są liczbami elektronów i protonów, a

$$m_1=N_pm_p+N_nm_n+N_em_e,$$

gdzie m_p, m_n i m_e są masami odpowiednio protonu, neutronu i elektronu. Przyjmując, że

$$m_p\approx m_n\gg m_e$$

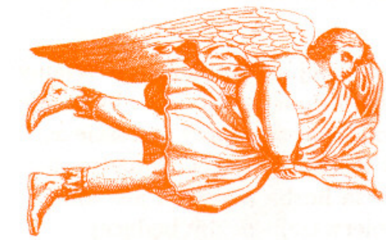
oraz podstawiajac $N_p=N_n$ (w cząsteczce węgla), mamy $m_1\approx 2N_pm_p$. Stąd

$$\frac{q_1}{m_1}=\frac{(N_e-N_p)e}{2N_pm_p}=\sqrt{\frac{G}{k_0}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$\frac{N_e-N_p}{N_p}=\frac{2m_p}{e}\sqrt{\frac{G}{k_0}}\approx 1,8\cdot 10^{-18}.$$

A więc działanie siły grawitacyjnej może zostać zrównoważone wtedy, gdy na jeden dodatkowy elektron przypada aż $5\cdot 10^{17}$ protonów.



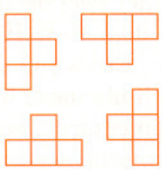
Drugi problem dotyczył rozwiązywania równań diofantycznych, tj. równań postaci
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
przy czym $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ szukamy w zbiorze liczb całkowitych. Hilbert pytał o istnienie algorytmu pozwalającego w skończenie wielu krokach sprawdzić, czy takie równanie ma rozwiązanie, czy też nie. W 1970 roku Jurij Matijasewicz udowodnił, że takiego algorytmu nie ma.

Dwudziesty wiek przyniósł także wielki postęp i w innych zagadnieniach teorii równań diofantycznych. Chyba najbardziej sensacyjnym okazał się wspomniany już wynik A. Wilesa, który w 1995 r. udowodnił, że równanie Fermata
$$x^n + y^n = z^n$$
nie ma dla $n \geq 3$ rozwiązań całkowitych, spełniających warunek $xyz \neq 0$. Wcześniej, bo w 1983 r. Gerd Faltings wykazał, że równanie to może mieć co najwyżej skończenie wiele rozwiązań parami względnie pierwszych. Wynik ten to bardzo szczególny przypadek tzw. *hipotezy Mordella*, którą Faltings wówczas udowodnił, gdzie za co otrzymał medal Fieldsa. Hipoteza ta głosi, że jeśli Γ jest krzywą płaską o równaniu $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a przy tym jej rodzaj jest większy od 1, to może na niej leżeć jedynie skończenie wiele punktów o obu współrzędnych wymiernych. Rodzaj krzywej jest pewną liczbą całkowitą, która w przypadku, gdy Γ nie ma punktów osobliwych (tj. takich, w których znikają obie pochodne cząstkowe wielomianu F), równa jest $(n-1)(n-2)/2$, gdzie n jest stopniem wielomianu F. W przypadku równania Fermata stosuje się hipotezę Mordella do krzywej $X^n + Y^n = 1$, której rodzaj jest większy od 1 przy $n \geq 4$.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

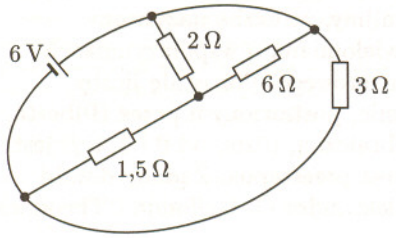
M 937. Prostokątną tablicę o rozmiarach $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$, podzielono na klatki 1×1 i pokolorowano na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następujących operacji: zmiana koloru z białego na czarny lub z czarnego na biały wszystkich klatek zawartych w pewnym prostokącie o rozmiarach $1 \times k$ lub $k \times 1$. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na czarny?
Rozwiązanie na str. 10



M 938. Dana jest szachownica o rozmiarach $n \times n$, $n \geq 3$. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do jednej z przedstawionych obok czteropolowych figur na szachownicy. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na przeciwny?
Rozwiązanie na str. 6

M 939. Pokratkowana płaszczyzna jest na początku cała pokolorowana na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do pewnego kwadratu 3×3 lub 4×4. Czy za pomocą tych operacji można zaczernić klatki pewnego kwadratu 2×2 i nie zmienić koloru pozostałych klatek?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 537. Dwie kulki węglowe mają niewielki nadmiar elektronów. Jaki musi być stosunek liczby dodatkowych elektronów do liczby protonów, aby siły elektrostatyczna i grawitacyjna równoważyły się?
Rozwiązanie na str. 11

F 538. Jakie jest całkowite natężenie prądu z baterii w obwodzie przedstawionym obok?
Rozwiązanie na str. 14