Nowa geometria

Zbigniew MARCINIAK, Witold SADOWSKI

Tematem jednej z ostatnich Szkół Matematyki Poglądowej (Grzegorzewice, styczeń 2000) było pytanie: *Skąd to się wzięło*? Naszym zdaniem matematyka wzięła się ze zmagań z rzeczywistością pozamatematyczną. Spróbujemy tę tezę zilustrować na przykładzie bardzo starej i poglądowej dyscypliny matematyki, jaką jest geometria.

Ludzi od niepamiętnych czasów fascynuje przestrzeń. Już Starożytni dostrzegli, że panuje w niej ład, który da się sprowadzić do niewielkiej liczby niemal oczywistych zasad. W *Elementach* Euklides formułuje te najprostsze zasady, a następnie wywodzi z nich praktycznie całą ówczesną wiedzę na temat geometrii przestrzeni, w której żyje.

Przez ponad dwa tysiąclecia pochodzący od Euklidesa opis przestrzeni był całkowicie zadowalający. Dopiero na początku XX wieku sformułowana przez Einsteina ogólna teoria względności doprowadziła do radykalnej zmiany w pojmowaniu przestrzeni fizycznej w skali kosmicznej, a w konsekwencji – do rewolucji w geometrii. Nowa geometria musiała sobie poradzić z nowymi faktami fizycznymi: otaczająca nas przestrzeń nie jest sztywna i wszędzie jednakowa, lecz „ugina się” pod ciężarem pojawiających się w niej gdzieniegdzie wielkich mas, a w dodatku bez przerwy rozciąga się jak powierzchnia nadmuchiwanego balonu.

Warto wiedzieć, że geometria riemannowska powstała ponad pół wieku wcześniej niż teoria względności.

Adekwatnym jej modelem staje się zatem obiekt, którego tylko małe kawałki wyglądają jak przestrzeń Euklidesa $\mathbb{R}^3$. Jest on „pozszywany” z euklidesowych map, na których mamy współrzędne i gdzie możemy uprawiać klasyczną geometrię i mechanikę: badać tory pocisków, wyznaczać ich prędkości itd. Gładkość zszycia gwarantuje, że nie wystąpi sprzeczność, gdy pocisk przeleci z jednej mapy do drugiej. Tak określona geometria nazywana jest od nazwiska jej twórcy, Bernharda Riemanna, geometrią riemannowską.

Podstawowe pojęcia klasycznej geometrii mają sens w geometrii riemannowskiej, choć czasem występują pod inną nazwą. Na przykład odpowiednikiem prostych Euklidesa są linie geodezyjne, czyli linie, po których w małych kawałkach najkrócej idzie się z jednego punktu do drugiego.

Od połowy lat osiemdziesiątych XX wieku zachodzi w geometrii kolejna rewolucja: miejsce klasycznej już geometrii riemannowskiej zaczyna zajmować tzw. geometria nieprzemienna.

Źródło tej nowej geometrii jest tej samej natury co źródło geometrii riemannowskiej. Podczas gdy geometria riemannowska powstała z korekty naiwnego przypuszczenia, że przestrzeń w skali kosmicznej jest dokładnie taka, jak w zakresie odległości znanych z naszego codziennego życia, tak geometria nieprzemienna rodzi się z obserwacji mikroświata. Okazuje się bowiem, że zgodny z geometrią Euklidesa pogląd, iż najmniejszą, graniczną figurą jest bezwymiarowy punkt, każdy zaś obiekt fizyczny, choćby najmniejszy, jest bryłą, nie wytrzymuje konfrontacji z doświadczeniem!

Według klasycznego modelu atom wodoru, którego rozmiar jest rzędu 10^{-10} m, składa się z 10 tysięcy razy mniejszego jądra oraz jednego maleńkiego elektronu. Ponieważ jądro ma ładunek dodatni, a elektron ujemny, to ich wzajemne przyciąganie powinna równoważyć jakaś siła, chroniąca atom przed zapaścią. Jednakże przypuszczenie, że (szybki) ruch obiegowy elektronu chroni go przed upadkiem na jądro, prowadzi do sprzeczności z prawami fizyki. Wiemy bowiem, że ładunek elektryczny poruszający się w przestrzeni ruchem krzywoliniowym emituje promieniowanie, przez co traci część swojej energii. W konsekwencji, elektron powinien spaść na jądro po mniej więcej 10^{-11} s, co oczywiście nie ma miejsca.

Planetarny model atomu wodoru, w którym elektron krąży wokół jądra niczym Ziemia wokół Słońca, prowadził do sprzeczności obserwacji z prawami klasycznej fizyki, które przewidywały niemal natychmiastowy upadek elektronu na jądro. Ponadto, wbrew klasycznym przewidywaniom, atom wodoru nie emituje światła o dowolnych, lecz tylko o ściśle określonych częstotliwościach. Częstotliwości te określa wzór Rydberga

$$(*)\qquad \nu = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) R$$

dla pewnych liczb naturalnych n, m i pewnej stałej R. Z tego potwierdzonego obserwacjami wzoru wynika, że tylko niektóre pary częstotliwości można dodać, by otrzymać częstotliwość też występującą w widmie – jest to tzw. reguła kombinacji. Tymczasem wg klasycznej teorii każde dwie częstotliwości po dodaniu powinny dać trzecią…

Fakt, że energia elektronu przyjmuje tylko niektóre, dyskretne wartości – choć z punktu widzenia klasycznej mechaniki, energia elektronu powinna w pewnym zakresie zmieniać się w sposób ciągły w zależności od ciągłej zmiany odległości elektron-jądro – można zaobserwować, gdy przez szklaną rurkę napełnioną wodorem przepuścimy światło, które następnie przepuścimy przez pryzmat. Na ekranie umieszczonym za pryzmatem ujrzymy charakterystyczny układ linii – widmo atomu wodoru. Jest to jego unikalny „podpis chemiczny”; każdy pierwiastek chemiczny ma swój indywidualny układ takich linii.

Heisenberg był pierwszym uczonym, który zauważył, że tajemnicza reguła kombinacji zachowuje się jak pewna algebra nieprzemienna. Rozważmy bowiem częstotliwości postaci $\nu_i = R/i^2$, gdzie i przebiega pewien skończony zbiór

Heisenberg, badając określoną tu algebrę, był w stanie objaśnić nie tylko częstotliwości kresek obserwowane w widmie atomu, ale także ich intensywności.

liczb I. Częstotliwości występujące we wzorze $(*)$ są postaci $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$, tj. można je poindeksować zbiorem $\Delta = \{(i,j) : i,j \in I\}$. Częstotliwości ν_{ij}, ν_{kl} można dodać tylko wtedy, gdy $j = k$. Otrzymujemy wtedy $\nu_{il} = \nu_{ij} + \nu_{jl}$. Mamy zatem w zbiorze Δ działanie „$\cdot$" określone wzorem

$$(i,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i,l) & \text{gdy } j = k, \\ 0 & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Każdy widzi, że wynik powyższego działania zależy od kolejności czynników! Tak w teorii przestrzeni pojawiła się algebra nieprzemienna.

⋆ ⋆ ⋆

Funkcje ciągłe na przestrzeni X i przyjmujące wartości rzeczywiste (lub zespolone) tworzą algebrę, gdyż możemy je dodawać i mnożyć podobnie jak liczby rzeczywiste. Element neutralny dodawania to funkcja tożsamościowo równa 0, natomiast element neutralny mnożenia to funkcja tożsamościowo równa 1.

Od dawna wiadomo, że z każdą przestrzenią X (w której określono zbiory otwarte) związana jest w naturalny sposób pewna algebra przemienna. Jest to algebra $C(X)$ funkcji ciągłych na X o wartościach rzeczywistych. Jakie informacje o przestrzeni X możemy odczytać z algebry $C(X)$? Zauważmy na początek, że nie można oczekiwać, by sama znajomość budowy algebry $C(X)$ pozwalała nam np. rozstrzygnąć, czy przestrzeń X jest kulą, czy sześcianem. Można bowiem łatwo wykazać, że jeśli przestrzeń X da się bez rozerwań i zlepień przekształcić na przestrzeń Y (o takich przestrzeniach mówimy, że są topologicznie takie same), to algebry $C(X)$ i $C(Y)$ są identyczne (tak samo zbudowane). Na szczęście algebra $C(X)$ niesie w sobie informacje o tych cechach przestrzeni X, które nie zmieniają się, gdy przestrzeń X poddajemy rozciąganiu lub ściskaniu jak gumową zabawkę. Okazuje się np., że za pomocą algebry $C(X)$ możemy już odróżnić sytuacje, gdy X to sfera, od przypadku, gdy X to powierzchnia dętki rowerowej czy też sfera z dwoma uchami. Kluczowe znaczenie ma twierdzenie Gelfanda–Najmarka, które głosi, że istnieje wyróżniona klasa algebr przemiennych (zwanych przemiennymi C^*-algebrami z jedynką), reprezentujących wszystkie przestrzenie zwarte! Każda algebra należąca do tej klasy koduje w sobie całą informację o topologii dokładnie jednej przestrzeni zwartej X, każda zaś przestrzeń zwarta posiada algebrę funkcji ciągłych o wartościach zespolonych należącą do tej klasy. Zatem wszystko to, co możemy powiedzieć o przestrzeniach zwartych i przekształceniach ciągłych między nimi, potrafimy jednoznacznie przetłumaczyć na język algebry!

Algebra z jedynką to algebra, w której istnieje element neutralny dla mnożenia. C^*-algebra to algebra, której elementy można mnożyć przez liczby zespolone i w której określono operację $*$, spełniającą warunki:

$$(a^*)^* = a,$$
$$(a+b)^* = a^* + b^*,$$
$$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*,$$
$$(ab)^* = b^* a^*.$$

⋆ ⋆ ⋆

Jaki jest pożytek z powyższego utożsamienia topologii z algebrą? Otóż otrzymujemy szansę na uprawianie geometrii nieprzemiennej. Postąpimy bowiem podobnie jak wtedy, gdy chcemy uprawiać geometrię w przestrzeniach wymiaru wyższego niż trzy. Przypomnijmy – robimy to tak: w dobrze nam znanej przestrzeni trójwymiarowej wprowadzamy układ współrzędnych, utożsamiając ją z obiektem algebraicznym: zbiorem $\mathbb{R}^3$ trójek (x_1, x_2, x_3) liczb rzeczywistych. Następnie odrzucamy założenie, że współrzędne są tylko trzy, i otrzymujemy ogólniejszy obiekt algebraiczny $\mathbb{R}^n$, w którym wprowadzamy pojęcia geometryczne przez analogię z $\mathbb{R}^3$.

Przestrzeń zwarta to taka przestrzeń, w której z dowolnego ciągu punktów można wybrać część tego ciągu zbieżną do pewnego punktu tej przestrzeni.

Analogicznie, w geometrii nieprzemiennej zastępujemy przestrzeń X przez C^*-algebrę przemienną, a następnie odrzucamy założenie przemienności. Ogólniejsze, „nieprzemienne" przestrzenie to hipotetyczne obiekty, których algebry funkcji ciągłych są nieprzemienne. Istnieją (albo nie istnieją) one w takim samym sensie, w jakim istnieje (lub nie – rzecz gustu) przestrzeń czterowymiarowa.

⋆ ⋆ ⋆

Tworzenie geometrii nieprzemiennej polega na budowaniu słowniczka, który każde pojęcie topologiczne tłumaczy na język C^*-algebr. Jest to możliwe na mocy twierdzenia Gelfanda–Najmarka. Sztuka polega jednak na tym, by po stronie algebraicznej nie użyć ani razu przemienności algebry. Wtedy dane pojęcie topologiczne będzie funkcjonowało także w przestrzeniach nieprzemiennych, które zdają się lepiej opisywać mikroświat. Oczywiście, do uprawiania geometrii (i fizyki) sama topologia nie wystarczy. Musimy się jeszcze nauczyć, jak w przestrzeniach nieprzemiennych wprowadzać inne pojęcia matematyczne. To wszystko można zrobić, ale to już temat na inną opowieść…

W poprzednim numerze *Delty* na stronie 2 większość przecinków została przez automat zamieniona na literę Γ. Czytelników i Autorów przepraszamy.

Redakcja