12/00 (36)

$\Gamma \lim\limits_{n\to\infty}$atias

Z okazji zbliżającego się *Gammalimatiasu* numer **37** zaprezentujemy **37** własności liczby **37**. Dziś początek, dokończenie dopiero w następnym tysiącleciu.

1. Zacznijmy od cechy podzielności przez **37**. Liczba naturalna dzieli się przez **37** z taką samą resztą, z jaką dzieli się przez **37** suma liczb utworzonych przez grupki trzycyfrowe, na jakie można podzielić daną liczbę, poczynając od prawej strony (z lewej strony może pojawić się liczba jedno- lub dwucyfrowa).

2. Jak obliczyć sumę sześcianów cyfr liczby **37**? Wystarczy na końcu dopisać 0. Mamy bowiem $\mathbf{3}^3 + \mathbf{7}^3 = \mathbf{37}0$. Żadna inna liczba naturalna nie ma tej własności.

3. Obliczenie sumy kwadratów cyfr liczby **37** jest już trochę bardziej pracochłonne, musimy bowiem dodać do liczby **37** iloczyn jej cyfr:

$$\mathbf{3}^2 + \mathbf{7}^2 = \mathbf{37} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}\,.$$

4. Podobnie znajdujemy kwadrat różnicy cyfr liczby **37**:

$$(\mathbf{7} - \mathbf{3})^2 = \mathbf{37} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}\,.$$

5. Niech p będzie liczbą pierwszą, n liczbą parzystą dodatnią mniejszą od $p-1$. Wtedy liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ dzieli się przez p, ale na ogół nie dzieli się przez p^2. Najmniejsza liczba pierwsza p, dla której podzielność przez p^2 jest możliwa, to **37** (dla $n = 32$). Fakt ten można mądrze wysłowić w sposób następujący: **37** jest najmniejszą liczbą pierwszą nieregularną.

Komentarze:

(i) opisana wyżej podzielność jest równoważna podzielności licznika n-tej liczby Bernoulliego przez p,

(ii) dla $n = p-1$ liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ nie dzieli się nawet przez p,

(iii) dla n nieparzystych, spełniających nierówność $3 \le n \le p-2$, liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ dzieli się przez p^2, natomiast dla $n = 1$ liczba ta dzieli się tylko przez p, a przez p^2 już nie.

6. Najmniejszą liczbą pierwszą, dla której opisana wyżej podzielność przez p^2 zachodzi dla więcej niż jednego n, jest **37.** liczba pierwsza, a mianowicie $p = 157$ (n równe 62 i 110). Fakt ten można mądrze wysłowić w sposób następujący: 157 jest najmniejszą liczbą pierwszą o indeksie nieregularności 2.

7. W trójkącie pitagorejskim ABC o przyprostokątnych $BC = 3$ i $AC = 4$ kąt przy wierzchołku A ma w przybliżeniu $\mathbf{37}^\circ$ (rys. 1). Dokładniej: $\mathbf{36}\overset{\circ}{,}87$.

8. W tymże trójkącie kąt przy wierzchołku C jest prosty, gdyby go jednak rozewrzeć do 120°, to bok AB osiągnąłby długość $\sqrt{\mathbf{37}}$ (rys. 2).

9. Jeżeli w trójkącie kąt między bokami długości **3** i **7** ma 60°, to trzeci bok ma długość $\sqrt{\mathbf{37}}$ (rys. 3).

10. Natomiast trójkąt o bokach długości **33** i **7**, tworzących kąt 120°, ma trzeci bok długości **37** (rys. 4).

11. W trójkącie prostokątnym długości boków są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Jedna z przyprostokątnych ma długość równą czwartej części obwodu trójkąta. Obliczyć długość przeciwprostokątnej.

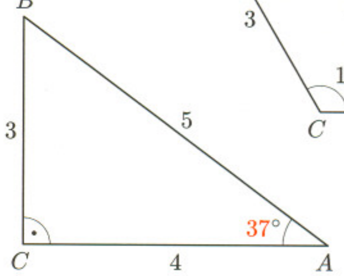
Odpowiedź: **37**.

12. Liczba **37** jest sumą kwadratów będących liczbami trójkątnymi, a mianowicie $\mathbf{37} = 1 + 36 = {}$ $= 1^2 + 6^2 = 1 + (1+2+3+4+5+6+7+8)$.

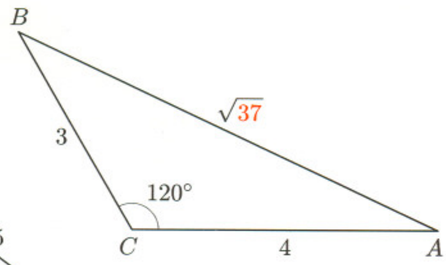
13. Jedyną liczbą czterocyfrową, której cyfry są uporządkowane rosnąco i która jest kwadratem liczby całkowitej, jest $1369 = \mathbf{37}^2$.

14. Wewnątrz koła o promieniu $\sqrt{11}$ i środku w punkcie kratowym (tzn. mającym obie współrzędne całkowite) znajduje się **37** punktów kratowych. To samo dotyczy kół o promieniu $\sqrt{12}$.

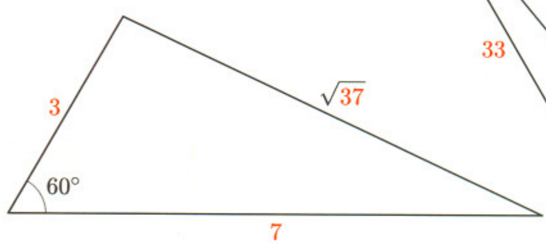
JWR



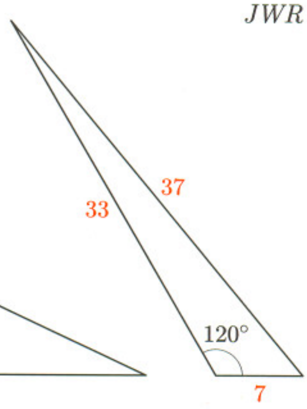
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl