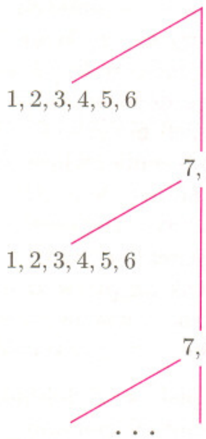
mała delta

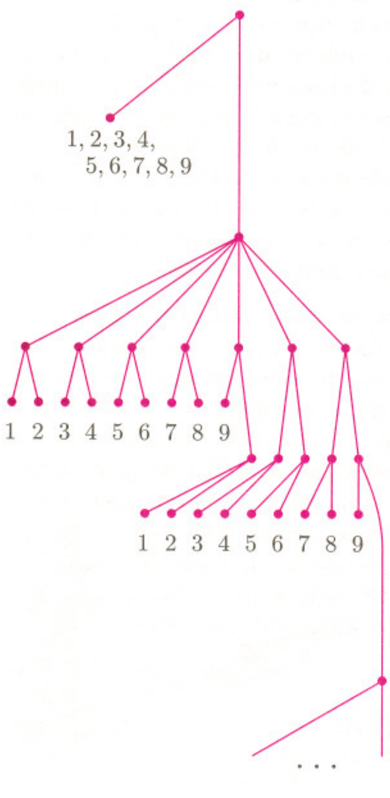
Rzuć monetą!



Przypuśćmy, że chcielibyśmy zagrać w naszą ulubioną grę, do której potrzebna jest sześcienna kostka. Niestety, nie mamy żadnej kostki.

To jednak nie oznacza, że nie możemy zagrać w naszą grę. Jeśli mamy przy sobie np. monetę, to możemy jej użyć. Jeśli jest to 50 groszy, to kostkę można kupić, ale nie o to chodzi – możemy zastąpić rzut kostką rzucaniem monetą. Sposób jest taki: rzucamy trzy razy – mogło wypaść 8 różnych wyników: OOO (1), OOR (2), ORO (3), ORR (4), ROO (5), ROR (6), RRO (7), RRR (8). W ten sposób otrzymaliśmy kostkę ośmiościenną, ale to nie ma znaczenia: jeśli „wypadło" 7 lub 8, to rzucamy monetą kolejne trzy razy – jeśli znowu wypadło 7 lub 8, to dalej rzucamy i tak dalej. W ten sposób zastąpiliśmy rzut kostką średnio czterema rzutami monetą. Jeśli jesteśmy „w lepszej sytuacji materialnej" i mamy dwie czy trzy różne monety, to możemy sobie ułatwić zadanie, rzucając nimi jednocześnie.

Problem można uogólnić. Możemy potrzebować innej kostki niż sześcienna – w niektórych grach używa się kostek mających 4, 8, 10, 12 lub 20 ścian (wszystkie poza 10-ścienną mają zwykle postać brył foremnych) oraz „dwuściennych" monet. Teraz również nie mamy potrzebnej kostki – mamy monetę lub inną kostkę, ale nie tę, co trzeba. (Możemy mieć też, na przykład, karty lub stoper – tych przedmiotów również można w pewien sposób użyć do losowania.)



Oto kilka prostych metod. Jeśli mamy monetę, a potrzebujemy kostki czworościennej, rzucamy dwa razy monetą – w podobny sposób, jak wcześniej. Jeśli mamy monetę i „kostkę trójścienną" (niekoniecznie prawdziwą) – można, również w podobny sposób, otrzymać kostkę sześcienną. Jeśli mamy kostkę czworościenną, a potrzebujemy trójściennej, to rzucamy nią, aż wypadnie 1, 2 lub 3 (podobną metodę stosowaliśmy już wcześniej). Trzeba tylko pamiętać o tym, żeby każdy wynik był możliwy i równie prawdopodobny.

Metody opisane powyżej (i podobne) można połączyć. Można zastąpić kostkę sześcienną monetą i trójścienną kostką, trójścienną kostkę czworościenną, czworościenną kostkę – monetą. Ta metoda jest lepsza od pierwszej – wykonujemy średnio mniej rzutów. (Pierwszą metodę można łatwo poprawić tak, żeby była równoważna.)

Jednak dobra metoda nie musi powstawać z połączenia powyższych. Oto przykład. Potrzebujemy kostki dziewięciościennej, a mamy monetę. Rzucamy monetą 4 razy. Jest 16 możliwości. Dla dziewięciu z nich kończymy. W pozostałych przypadkach rzucamy monetą jeszcze raz, każda możliwość się „rozdwaja" i powstaje 14 możliwości, z których 9 kończy i zostaje 5. Rzucamy moneta jeszcze raz, 9 z 10 przypadków kończy, a dla jednego, ostatniego powtarzamy procedurę.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 397 (WT=2,76) i 398 (WT=1,07)
z numeru 3/2000

Marcin Peczarski	– Warszawa	46,12
Michał Adamaszek	– Kęty	45,01
Rafał Pikuła	– Wrocław	44,76
Jerzy Witkowski	– Radlin	42,31
Konrad Patkowski	– Gdańsk	41,43
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	40,12
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	36,66

Trzy sumy powyżej 44 i trzy nowe nazwiska! Panowie Peczarski, Adamaszek, Pikuła: witamy w **Klubie 44 M**.

Ta metoda jest prawidłowa – i w pewnym sensie najlepsza, bo można udowodnić, że średnia liczba wykonywanych rzutów monetą jest najmniejsza możliwa. Jeśli się jej uważnie przyjrzymy, zauważymy, że nie jest ona w rzeczywistości aż tak skomplikowana. Jeśli w danym momencie liczba możliwości jest większa niż liczba ścianek potrzebnej kostki – np. po 4 rzutach mamy 16 możliwości i $16 > 9$ – to dziewięć z nich numerujemy, a w pozostałych przypadkach rzucamy kolejny raz, podwajając liczbę możliwości. Jeśli się jeszcze uważniej przyjrzymy, to zauważymy, że można ją wykonać dla dowolnej potrzebnej kostki, a także dla dowolnej (jednej) kostki lub monety posiadanej... Można udowodnić, że uogólniona metoda (dobrze uogólniona) jest najlepsza pod względem liczby potrzebnych rzutów.

Małą Deltę przygotował Eryk KOPCZYŃSKI
na motywach swojej pracy
wyróżnionej w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1999 r.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2001

Zadania z matematyki nr 409, 410

Redaguje Marcin E. KUCZMA

409. Z dwóch tysięcy klocków o rozmiarach $2 \times 2 \times 1$ zbudowano sześcian o krawędzi długości 20. Dowieść, że istnieje prosta przecinająca wnętrze tego sześcianu, ale nie przecinająca wnętrza żadnego klocka.

410. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieją liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające warunki: $|x_i| \le 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$; $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n/3$.

Zadanie **410** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

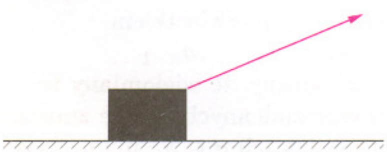
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 296 (WT=1,77), 297 (WT=2,29),
298 (WT=2,44) i 299 (WT=3,76)
z numeru 4/2000 i 5/2000

Jarosław Łazuka	– Warszawa	42,18
Marek Wójcicki	– Szczecin	35,68
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	32,73
Aleksander Surma	– Myszków	32,43
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	24,93
Tomasz Rudny	– Warszawa	23,95

Zadania z fizyki nr 306, 307

Redaguje Jerzy B. BROJAN

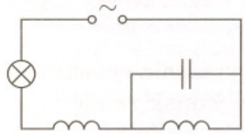
306. Jaką minimalną siłą trzeba działać na klocek o ciężarze P, aby ruszyć go z miejsca (zob. rys. 1), jeśli współczynnik tarcia między klockiem a podłożem jest równy f?



Rys. 1

307. Dwie jednakowe cewki, kondensator i żaróweczkę zestawiono w obwód (rys. 2) i podłączono do źródła napięcia przemiennego. W poniższych zdaniach wybrać właściwe wersje wyrazów w nawiasach i uzasadnić. Opór uzwojeń cewek można pominąć.

Gdy zwroty nawinięcia obu cewek były zgodne, okazało się, że podczas przesuwania jednej cewki względem drugiej przy pewnej szczególnej ich odległości żaróweczka świeci się (silniej/słabiej), niż przy innych sąsiednich położeniach. Gdy jedną z cewek odwrócono, tak że zwrot jej nawinięcia był przeciwny względem drugiej, również wystąpiła taka szczególna odległość cewek, dla której żaróweczka świeciła się (silniej/słabiej). Gdy zwiększono pojemność kondensatora i ponownie poszukano obu tych szczególnych przypadków, okazało się, że pierwszy z nich występuje przy (większej/mniejszej) odległości cewek, niż poprzednio, a drugi przy (większej/mniejszej).



Rys. 2