11/00 (35)

Γ-limatias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (23′)

Wyjaśnienie oszustwa (23): Przedstawiony rachunek jest prawie poprawny. Zawodzi tylko dla $n = 2000$, kiedy to równość

$$\frac{4000000 - n^2}{4000000} \cdot I_n = 0$$

przyjmuje postać $0 \cdot I_{2000} = 0$, a z tego, niestety, niczego wywnioskować się nie da.

Dla $n = 2000$ poprawne rozwiązanie zadania wygląda następująco:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2000x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4000x}{2} \mathrm{d}x = $$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 4000x}{8000} \Bigg|_0^{2\pi} = \pi.$$

Zatem

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq 2000, \\ \pi & \text{dla } n = 2000. \end{cases}$$

JWR

GRY (17)

Dokonanie pełnej analizy gry KRĘGLE prowadzi do następującej tabeli liczb Grundy'ego $k(n)$ pozycji złożonej z n kręgli stojących obok siebie:

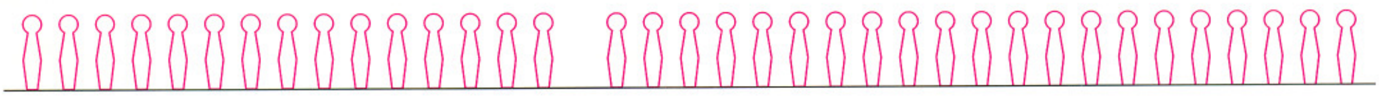
0	0	12	4	24	4	36	4	48	4	60	4	72	4	84	4
1	1	13	1	25	1	37	1	49	1	61	1	73	1	85	1
2	2	14	2	26	2	38	2	50	2	62	2	74	2	86	2
3	3	15	7	27	8	39	3	51	8	63	8	75	8	87	8
4	1	16	1	28	5	40	1	52	1	64	1	76	1	88	1
5	4	17	4	29	4	41	4	53	4	65	4	77	4	89	4
6	3	18	3	30	7	42	7	54	7	66	7	78	7	90	7
7	2	19	2	31	2	43	2	55	2	67	2	79	2	91	2
8	1	20	1	32	1	44	1	56	1	68	1	80	1	92	1
9	4	21	4	33	8	45	8	57	4	69	8	81	8	93	8
10	2	22	6	34	6	46	2	58	2	70	6	82	2	94	2
11	6	23	7	35	7	47	7	59	7	71	7	83	7	95	7

Powyższa tabela daje wartości $k(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n. Okazuje się bowiem, że $k(n + 12) = k(n)$ dla $n \geq 71$. Tak więc możemy z niej odczytać, że $k(1000000) = k(76) = 1$.

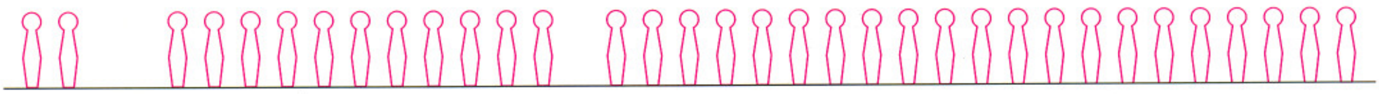
Nietrudno zauważyć, że w tabeli tej nie występuje (poza $n = 0$) liczba 0. Fakt ten można wyjaśnić w bardzo prosty sposób. Otóż liczba Grundy'ego 0 oznacza, że wygrywającą strategię ma gracz drugi, podczas gdy przy dodatniej liczbie Grundy'ego wygrywa gracz rozpoczynający.
Jeżeli zaczynamy grę KRĘGLE od pozycji złożonej z kręgli ustawionych obok siebie, łatwo wskazać strategię wygrywającą dla gracza pierwszego. W pierwszym rzucie powinien on potoczyć kulę w sam środek rządku kręgli. Jeśli liczba kręgli jest nieparzysta, strąci wówczas jeden kręgiel, jeśli parzysta, dwa kręgle. Tak czy owak, pozostawi dwa rządki kręgli jednakowej liczności. Dalsza rozgrywka odbywać się będzie na dwóch egzemplarzach tej samej gry. Cokolwiek wykona gracz drugi na jednym egzemplarzu, gracz rozpoczynający powtórzy na drugim. A to, jak już wiemy, jest gwarancją powodzenia.

Skoro tak prosto wygląda strategia w tej grze, po co nam tabela liczb Grundy'ego? No cóż, możemy być postawieni przed koniecznością wykonania ruchu w pozycji nie mającej w sobie żadnej symetrii. Wyobraźmy sobie, że stajemy do gry KRĘGLE z precyzyjnie rzucającym, ale nie znającym wygrywającej strategii przeciwnikiem.

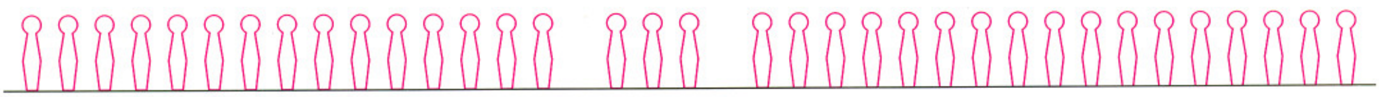
Zaczynamy od 37 kręgli ustawionych w rządku i przeciwnik w swoim pierwszym ruchu strąca szesnasty kręgiel od brzegu, pozostawiając dwa rzędy mające 15 i 21 kręgli.



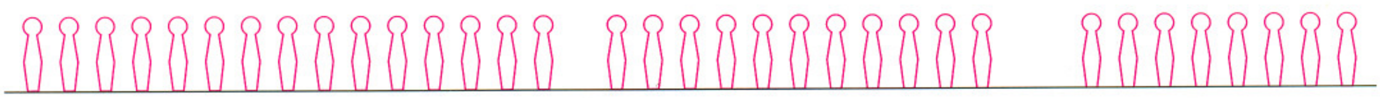
Wygraną mamy już w kieszeni. Wystarczy wybrać jeden z trzech (lub sześciu, jeśli rozróżniamy nieistotną kolejność ustawienia skupisk kręgli) wygrywających ruchów prowadzących do pozycji



2 11 21



15 3 17



15 11 8

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl