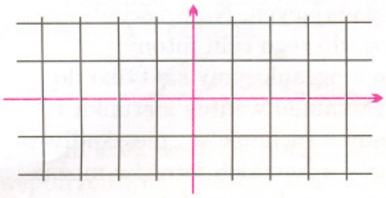
Czasoprzestrzeń z kotem na horyzoncie

Mikołaj KORZYŃSKI i Magda STOBIŃSKA

Gdy układ współrzędnych zawodzi...

Kartezjusz przypisywał punktom na płaszczyźnie pary liczb za pomocą siatki złożonej z dwóch prostopadłych rodzin prostych.



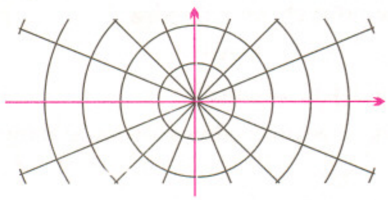
W tym podejściu odległość Δs między dwoma punktami spełnia równanie

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Nie jest to, oczywiście, jedyny sposób określenia położenia punktów na płaszczyźnie. Konkurencyjna metoda to np. *biegunowy układ współrzędnych* (r, φ), związany z poprzednim wzorami:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Siatka tego układu współrzędnych to pajęczyna:



Podanie pełnego wzoru na odległość punktów w tym układzie jest trudniejsze i niecelowe – w fizyce zazwyczaj interesuje nas odległość bardzo bliskich punktów (infinitezymalna). Ogólnie wzór na infinitezymalną odległość punktów można zapisać w następującej formie

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

gdzie układ funkcji $g_{\mu\nu}$ to składowe *tensora metrycznego* albo metryki. Funkcje te zależą od układu współrzędnych, np. w układzie biegunowym metryka ma postać

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Zauważmy, że środek układu biegunowego nie ma dobrze określonej współrzędnej φ: wszystkie punkty, dla których $r = 0$, mają współrzędne kartezjańskie $x = 0, y = 0$. Odbija się to także na postaci metryki w tym punkcie – znika wyraz zawierający $d\varphi^2$. Ten układ współrzędnych nie jest więc dobry, gdy chcemy opisać np. krzywą przechodzącą przez środek układu współrzędnych. Ale patologia metryki jest tylko wynikiem złego sposobu numeracji punktów na płaszczyźnie, a nie jakąś szczególną cechą punktu $x = 0$, $y = 0$. Podobnie źle zachowuje się układ współrzędnych sferycznych, czyli długość i szerokość geograficzna na globusie:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

„Patologiczne" są w tym przypadku prócz środka układu punkty „bieguna północnego i południowego" $\theta = 0$ i $\theta = \pi$.

Wszystkie powyższe przykłady pokazują osobliwości pozorne: metryka w pewnych miejscach „źle zachowuje się", ale można „przywołać ją do porządku", odpowiednio zmieniając współrzędne.

Pomysł, by punkty w geometrii oznaczać liczbami rzeczywistymi, pochodzi od Kartezjusza i Fermata. Podejście to pozwala zastosować cały aparat analizy i algebry do zagadnień geometrii i fizyki. W fizyce oprócz dobrze znanego ze szkoły układu kartezjańskiego stosuje się inne układy (patrz margines). Postępuje się tak zwłaszcza wtedy, gdy zagadnienie ma jakąś szczególną symetrię, np. sferyczną.

Dobranie odpowiedniego układu do zagadnienia nie zawsze jest sprawą łatwą. Jest to wyjątkowo trudne w przypadku geometrii nieeuklidesowej, gdzie prostoliniowe, kartezjańskie układy współrzędnych nie istnieją. W fizyce z taką sytuacją spotkano się w Ogólnej Teorii Względności. Grawitację opisuje się tam przy użyciu geometrii (np. *Delta* 9/1998).

Wkrótce po odkryciu przez Alberta Einsteina i Davida Hilberta równań pola grawitacyjnego Karl Schwarzschild znalazł ich rozwiązanie dla czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej – odpowiednik pola grawitacyjnego punktu obdarzonego masą M w teorii Newtona. Czasoprzestrzeń Schwarzschilda opisujemy czterema współrzędnymi, oznaczanymi zazwyczaj t, r, θ i φ. „Odległość", czyli interwał dwu bliskich punktów w czasoprzestrzeni, dana jest wzorem

$$(1) \qquad ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Stosujemy układ jednostek, w którym stała grawitacyjna $G = 1$, prędkość światła $c = 1$. W dwu ostatnich współczynnikach rozpoznajemy odległość na powierzchni dwuwymiarowej sfery o promieniu r. Co więcej, dla dużych wartości r wyrazy przy dt^2 i dr^2 dążą do ± 1, a cała metryka do metryki sferycznego układu współrzędnych na przestrzeni euklidesowej z czasem (tzw. *czasoprzestrzeni Minkowskiego*). Ta cecha, zwana asymptotyczną płaskością, jest geometrycznym wyrazem faktu, że oddziaływanie grawitacyjne zanika daleko od źródła (ale uwaga – w przeciwieństwie do sferycznego układu współrzędnych – r nie jest geometryczną odległością od źródła, lecz parametrem pozwalającym z grubsza powiedzieć, jak daleko od środka jesteśmy).

Znacznie gorzej wygląda zachowanie się współczynników metryki dla małych r. Oprócz spodziewanej osobliwości dla $r = 0$ kłopoty sprawia powierzchnia $r = 2M$, tzw. *horyzont Schwarzschilda*. Początkowo sądzono, że ta osobliwość nie odgrywa w praktyce żadnej roli (dla Słońca wystąpiłaby, gdyby jego rozmiary, bez zmiany masy, spadły do kilku kilometrów), potem jednak, wraz z rozwojem wiedzy o ewolucji gwiazd, astronomowie i fizycy zaczęli coraz poważniej spekulować na temat obiektów, w których horyzont rzeczywiście istnieje. Nazwano je czarnymi dziurami.

W sposób naturalny pojawia się więc pytanie: co stanie się z cząstką, która spadnie na powierzchnię horyzontu, czyli jak wygląda równanie przechodzącej przezeń geodezyjnej – i czy w ogóle takie geodezyjne istnieją? Dopiero w 1960 roku problem ten ostatecznie rozwiązał Martin Kruskal. Zdefiniował on nowe współrzędne, w których czasoprzestrzeń Schwarzschilda możemy oglądać w całej okazałości.

Zanim jednak podamy szczegóły konstrukcji Kruskala, musimy zapoznać się bliżej z własnościami czasoprzestrzeni Schwarzschilda: zbadamy, jak pole grawitacyjne w tej czasoprzestrzeni wpływa na spadek swobodny ciał masywnych.

Wyobraźmy sobie astronautę-obserwatora umieszczonego w rakiecie utrzymującej się za pomocą silników w punkcie o stałych współrzędnych r, φ, θ. Możemy się spodziewać, że będzie on odczuwać na pokładzie swojej rakiety przyspieszenie, odpowiednik newtonowskiego $\vec{g}$. By to sprawdzić, nasz astronauta upuści w swojej rakiecie niewielkiego kota. (Od czasów Schrödingera koty są bardzo popularne w fizyce jako bohaterowie eksperymentów myślowych). Spróbujmy zbadaćΓco się z nim stanie po osiągnięciu powierzchni $r = 2M$Γ a potem (jeśli przeżyje) powierzchni $r = 0$.

Początkowo kot spada dalej swobodnieΓczyli porusza się po geodezyjnej o warunku początkowym zadanym równością jego czteroprędkości i czteroprędkości rakiety. Równanie ruchu zwierzaka ma postać (patrz *Delta* 9/1998)

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Różniczkowanie odbywa się względem czasu własnego τ kota. Ale póki prędkość kota względem rakiety jest znacznie mniejsza niż cΓjego czas własny praktycznie pokrywa się z czasem pokładowym rakiety. Prócz tego spośród sumowanych wyrazów po prawej stronie znaczenie ma tylko $\Gamma^\mu_{00} u^0 u^0$ – wszystkie pozostałe składowe czteroprędkości są bardzo małe w porównaniu z u^0. Równanie ruchu upraszcza się więc do

$$\frac{\mathrm{d}u^r}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{M}{r^2},$$

pozostałe zaś pochodne znikają. To jeszcze nie koniec obliczeń: wspominaliśmy jużΓże r nie jest poprawnie mierzoną odległością. Uwzględnienie tego prowadzi do równania przyspieszenia

$$a^r = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}.$$

WidaćΓże wynik dla małych M i dużych r staje się równy co do wartości newtonowskiemu $\vec{g}$. Z drugiej strony dla małych r przyspieszenie rośnie znacznie szybciejΓniż wynikałoby to z rachunku klasycznego – dążąc do nieskończoności na powierzchni $r = 2M$!

Oznacza toΓże astronauta nie powinien obniżać lotu do wysokości promienia grawitacyjnego ciężkiego obiektu. Nie ma tam możliwości utrzymania się na stałej wysokościΓbez względu na moc czy siłę ciągu silników: przyspieszenie grawitacyjne jest nieskończone. Podobnie żadna siła nie utrzyma kotaΓgdy spadnie na powierzchnię horyzontu. Rozumowanie to uzasadnia nazwę „horyzont" nadaną powierzchni $r = 2M$. Horyzont to miejsceΓzza którego nie ma powrotu.

Wciąż jednak nie wiemyΓco dzieje się z kotem w trakcie mijania horyzontu. Pokazaliśmy tylkoΓ że względem kogośΓkto horyzontu **nie przekracza** ($r = \mathrm{const}$)Γkot doznaje nieskończonego przyspieszenia. Trudno jednak stwierdzićΓczy ten fakt ma jakiś wpływ na jego kondycję: można wszak wymyślić obserwatoraΓ względem którego ZiemiaΓa wraz z nią CzytelnikΓ ma nieskończone przyspieszenieΓa nawet dobrać tak układ współrzędnychΓby ów obserwator miał stałe współrzędne przestrzenne. Absurdalne wynikiΓjakie dałaby analiza ruchu Ziemi w tym układzie ($a = \infty$)Γ raczej nie powinny spędzać snu z powiek Ziemianom...

Podsumujmy naszą dyskusję: współrzędne t, r, φ, θ pokazują czasoprzestrzeń z punktu widzenia obserwatorówΓktórzy w jakiś sposóbΓnp. za pomocą silnikówΓ*utrzymują się na stałej wysokości* r; tyle że takich obserwatorów *nie ma na wysokości* $2M$ *i niżej* (przynajmniej pośród obserwatorów obdarzonych masą)Γnic więc dziwnegoΓże próby opisu ruchu cząstek nie udają się. To sugeruje sposób na pozbycie się kłopotów: spróbujmy opisać czasoprzestrzeń Schwarzschilda z punktu widzenia obserwatorów (cząstek) swobodnie spadających. Najprościej rachunkowo jest wybrać do tego celu fotony.
W dalszych obliczeniach ograniczymy się tylko do fotonów spadających radialnieΓwzdłuż kierunku r. Dzięki temu eliminujemy z rachunków „nieszkodliwe" współrzędne θ i φ. Zbiór wszystkich fotonów można podzielić na dwa mniejsze podzbiory: fotonów „uciekających" i „wpadających". Te pierwsze wraz ze wzrostem czasu oddalają się od czarnej dziury ($\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} > 0$)Γ te drugie przeciwnie.

Linie świata fotonów spełniają więc zależność

$$\mathrm{d}s^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2. \tag{2}$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu dla funkcji $r(t)$ lub $t(r)$. Łatwo pozwala ono wyznaczyć linie świata fotonów w nowych współrzędnych

$$U := t - r_* = \mathrm{const},$$

$$V := t + r_* = \mathrm{const},$$

gdzie parametr r_*Γzwany współrzędną żółwiowąΓdany jest przez zależność

$$r_* = r + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|.$$

Teraz równanie $U = \mathrm{const}$ opisuje geodezyjną fotonów „uciekających"Γa $V = \mathrm{const}$ fotonów „wpadających". Postarajmy się wyrazić element liniowy (2) w nowych współrzędnych

$$\begin{aligned} 2r_* &= V - U, \\ 2t &= V + U, \end{aligned} \tag{3}$$

stąd

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2.$$

Powierzchnia horyzontu $r = 2M$ nadal sprawia nam kłopot. Jednak ta zamiana zmiennych nie była bezcelowa. Powierzchnie $U = \mathrm{const}$ i $V = \mathrm{const}$ są geometrycznie dobrze określoneΓtylko sposób ich parametryzacji jest zły. Jest to taki sam problemΓ jaki dotyczył sfery i jej rzekomych osobliwości na biegunach. Wiadomo jednakΓże sfera istnieje i nie jest osobliwaΓa z „niewygodnymi" punktami uporać się można za pomocą nowej parametryzacji jej powierzchni. Podobnie tutaj powinniśmy zaproponować nową parametryzację: jeżeli zadziałamy funkcją exp na obie strony równania (3)Γto otrzymamy równość

$$\mathrm{e}^{(V-U)/4M} = \mathrm{e}^{r_*/2M} = \left|\frac{r}{2M} - 1\right|\mathrm{e}^{r/2M}. \tag{4}$$

Nowe parametry definiujemy następująco:
dla $r > 2M$

$$p := -\mathrm{e}^{-U/4M} = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}e^{-t/4M},$$

$$q := \mathrm{e}^{V/4M} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}\mathrm{e}^{t/4M}$$

oraz dla $r < 2M$

$$p := \mathrm{e}^{-u/4M} = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \mathrm{e}^{-t/4M},$$

$$q := \mathrm{e}^{v/4M} = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \mathrm{e}^{t/4M},$$

Pozwalają one wyeliminować „sprawcę" całego zamieszania – czynnik $1 - 2M/r$ z elementu liniowego

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{32M^3}{r} \mathrm{e}^{-r/2M} \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q + r^2\, \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2.$$

Ostatni krok wreszcie polega na powrocie ze współrzędnych „fotonowych", zadanych przez trajektorie tych cząstek, do współrzędnych (u, v), z których jedna jest czysto czasowa, a druga czysto przestrzenna – operowanie takimi współrzędnymi jest bardziej intuicyjne. Robimy to w następujący sposób: dla $r > 2M$ definiujemy

$$(5) \quad u := \frac{1}{2}(q - p) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \cosh(t/4M),$$

$$(6) \quad v := \frac{1}{2}(p + q) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \sinh(t/4M),$$

a dla $r < 2M$

$$(7) \quad u := \frac{1}{2}(q - p) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \sinh(t/4M),$$

$$(8) \quad v := \frac{1}{2}(p + q) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{r/4M} \cosh(t/4M).$$

Metryka ma teraz postać

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{32M^3}{r} \mathrm{e}^{-r/2M} (\mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}u^2) + r^2\, \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2.$$

Oto *współrzędne Kruskala–Szekeresa* w całej okazałości. We wzorach na metrykę może dziwić ciągłe używanie starej współrzędnej r. Od tej pory jednak r powinno być traktowane jako funkcja nowych współrzędnych u i v, zadana w sposób uwikłany wzorem:

dla $r > 2M$

$$(9) \qquad u^2 - v^2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \mathrm{e}^{r/2M},$$

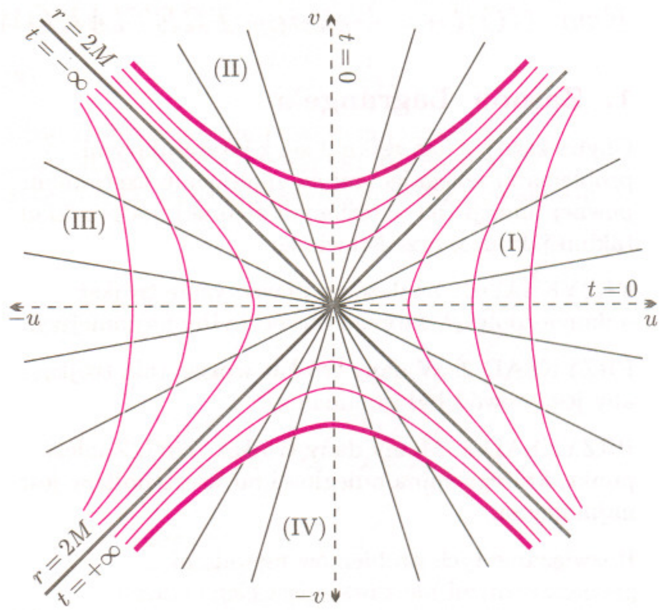
dla $r < 2M$

$$(10) \qquad v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{e}^{r/2M}.$$

W tych wzorach nie otrzymujemy żadnej osobliwości dla powierzchni $r = 2M$. Wszystkie składowe metryki oraz współrzędne u i v przyjmują skończone wartości dla każdej skończonej wartości r z wyłączeniem $r = 0$. Pozbyliśmy się przynajmniej jednej osobliwości. Kot nie zostanie na razie rozerwany na strzępy, ale przeżyje przygodę swojego życia: swobodny spadek do czarnej dziury! Ostatnią, niestety, ponieważ, jak się przekonamy, nie uda mu się w żaden sposób uniknąć spotkania z osobliwością w $r = 0$.

Teraz ciekawostka: rozważmy punkty dalekie od horyzontu, czyli takie, dla których $r \gg 2M$. Ze wzorów łączących współrzędne Kruskala ze starymi r i t możemy łatwo przekonać się, że zachodzi dla nich nierówność $u^2 \gg v^2$. Ale można ją spełnić na dwa sposoby: albo $u \gg |v|$, albo $u \ll -|v|$. Odkryliśmy ciekawą rzecz – czasoprzestrzeń jest „podwójna"! Jak to rozumieć?

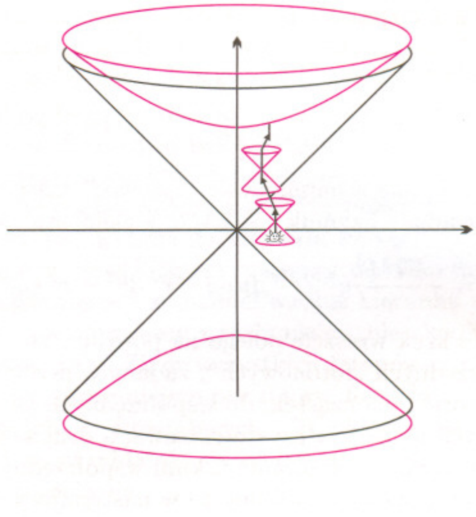
Przypomnijmy sobie nasze wzory zadające współrzędne Kruskala–Szekeresa oraz wzory (9)–(10). Były one słuszne, o ile były spełnione odpowiednio zależności $u > |v|$ dla $r > 2M$ oraz $v > |u|$ dla $r < 2M$. Wzór (9) spełniają także inaczej dobrane u_* i v_*, mianowicie $u_* = -u$ oraz $v_* = -v$. Te ujemne pierwiastki opisują punkty, których we współrzędnych Schwarzschilda nie było. Odkryliśmy więc na papierze nowe, „ukryte" dotychczas regiony czasoprzestrzeni. Dopiero współrzędne Kruskala, rozszerzone do dowolnych rzeczywistych u i v, dają pełny, globalny opis geometrii czasoprzestrzeni: pierwsza para współrzędnych opisuje region I, druga II, itd. Współrzędne Schwarzschilda opisywały tylko regiony I–II. Spójrzmy na rysunek:



Co można powiedzieć o tych czterech częściach czasoprzestrzeni? Diagram Kruskala interpretujemy następująco: regiony I i III to identyczne, lecz rozłączne, asymptotycznie płaskie wszechświaty, znajdujące się na zewnątrz promienia grawitacyjnego czarnej dziury; natomiast regiony II i IV to także identyczne pod względem fizycznym światy, z taką różnicą, że strzałki czasu w nich zawarte są skierowane przeciwnie.

Wracając jeszcze do poprzedniej dyskusji współrzędnych Kruskala–Szekeresa, ze wzorów (5)–(8) wynika, że na diagramie powierzchnie stałego r są hiperbolami o asymptotach zadanych równaniami $u = v$ oraz $u = -v$. Natomiast powierzchnie stałego czasu są liniami prostymi, promieniście rozchodzącymi się ze środka układu współrzędnych. Analogicznie, radialne linie zerowe (linie świata fotonów) są postaci $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$ oraz $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}v$. Oznacza to, że pozbyliśmy się kłopotów związanych z „zamykaniem się" stożków świetlnych we współrzędnych Schwarzschilda dla cząstek dobiegających do powierzchni $r = 2M$. Stożki we współrzędnych Kruskala–Szekeresa są zawsze zbudowane z tworzących nachylonych pod kątem 45° do osi układu.

Jesteśmy już gotowi do opisania losów kota pod horyzontem. Kot, jako obiekt masywny, porusza się zawsze po krzywej czasowej, czyli jego czteroprędkość zawsze znajduje się wewnątrz stożka świetlnego. Na diagramie Kruskala oznacza to, że jego czteroprędkość jest zawsze skierowana „w górę", w kierunku rosnącego u, a malejącego r. Wobec tego spotkanie kota z osobliwością w $r = 0$ jest nieuniknione.



Zasada Lagrange'a a geometria

Ewa GORA, Aleksiej TRETIAKOW i Henryk ŻOŁĄDEK

1. Zasada Lagrange'a

Chyba każdy z nas zetknął się z interesującymi problemami polegającymi na znalezieniu ekstremum pewnej funkcji (na określonym zbiorze), na przykład takimi jak niżej przedstawione:

PRZYKŁAD 1. Znaleźć na płaszczyźnie trójkąt o danym polu P, którego obwód byłby najmniejszy.

PRZYKŁAD 2. W dany trójkąt wpisać taki trójkąt, aby jego obwód był minimalny.

PRZYKŁAD 3. Mamy dany trójkąt ABC. Znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

Rozwiązanie tych problemów metodami geometrycznymi nie zawsze jest elementarne.

W niniejszym tekście chcemy przedstawić uniwersalny sposób rozwiązania następującego problemu geometrycznego na ekstremum:

Dla danego trójkąta ABC i danej liczby naturalnej $n = 2, 3, \ldots$ znaleźć punkt, dla którego suma $|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n$ potęg odległości od boków jest najmniejsza.

Do rozwiązania tego problemu proponujemy klasyczny sposób Lagrange'a. W XVIII w. Lagrange wykoncypował następującą ogólną metodę rozwiązywania zagadnień optymalizacji. Przypuśćmy, że mamy znaleźć ekstremum funkcji $\varphi(x)$ określonej na zbiorze $X \subset \mathbb{R}^n$, danym pewnymi równaniami i nierównościami: $f_i(x) = 0$ lub $f_i(x) \geq 0$ (gdzie funkcje f_i są różniczkowalne).

Jeżeli punkt ekstremalny x^* leży we wnętrzu obszaru X (który ma niepuste wnętrze), to warunkiem koniecznym jest

$$\varphi'(x^*) = 0, \tag{1}$$

tzn. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x^*) = \ldots = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x^*) = 0.$

Natomiast jeśli punkt x^* nie należy do wnętrza obszaru X, tylko leży na jego brzegu, wówczas powyższe twierdzenie nie ma sensu. Mamy do czynienia z ekstremum warunkowym: szukamy $\min \varphi(x)$ przy warunkach $f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0$. Korzystamy wtedy z zasady Lagrange'a.

Zasada Lagrange'a mówi, że w tym przypadku warunkiem koniecznym ekstremum w x^* jest

$$\varphi'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x^*), \tag{2}$$

gdzie λ_i są tzw. *mnożnikami Lagrange'a*. Mamy tutaj $n + m$ danych równań (n równań na pochodne cząstkowe w (2) i m równań $f_i(x) = 0$) na $n + m$ szukanych $x_1^*, \ldots, x_n^*$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Przy rozwiązywaniu konkretnego problemu poszukuje się ekstremów we wnętrzu X i we wszystkich gładkich kawałkach brzegu, a następnie porównuje się otrzymane wartości funkcji φ (patrz [1]).

2. Pewne zagadnienie geometryczne

Dla danego trójkąta ABC znaleźć punkt, którego suma kwadratów odległości od boków trójkąta jest najmniejsza.

Rozwiążemy to zadanie, posługując się powyższą zasadą Lagrange'a, a następnie zinterpretujemy rozwiązanie w terminach tzw. symedian.

W naszym przypadku funkcją $\varphi(x)$ będzie

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{3}$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są odległościami punktu P od boków BC, AC, AB (rys. 1). Zakładamy jeszcze, że $x_i \geq 0$, jeśli x_i leży w tej samej półpłaszczyźnie co i sam trójkąt, w przeciwnym przypadku będzie $x_i \leq 0$.