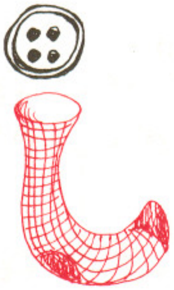


Zasadnicze twierdzenie algebry

Paweł STRZELECKI

Zasadnicze twierdzenie algebry ma wiele dowodów, wykorzystujących różne gałęzie matematyki, od topologii po teorię funkcji analitycznych. Są wśród nich dowody ładniejsze i brzydsze, prostsze i trudniejsze; skądinąd takie oceny są względne, zależą bowiem od gustu, cierpliwości i wykształcenia tego, kto przez dowód chciałby przebrnąć. Bardzo elementarny dowód, pochodzący od Gaussa, odwołuje się tylko do prostych własności liczb zespolonych i funkcji ciągłych.

Jak zawsze, na początku trzeba uporać się z oznaczeniami. Weźmy więc wielomian $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, gdzie $n \geq 1$, oraz $a_0, a_1, \dots, a_n$ są liczbami zespolonymi. Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $|a_n| = 1$. Aby wykazać, że P ma pierwiastki, udowodnimy dwa lematy.

Jeśli wiadomo już, że każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony, to z twierdzenia Bezouta wynika natychmiast, że każdy taki wielomian ma n pierwiastków (liczonych z krotnościami).

Lemat 1. *Funkcja $z \mapsto |P(z)|$ osiąga na płaszczyźnie zespolonej swój kres dolny.*

Lemat 2. *Jeśli $|P(z_0)| = \inf\{|P(z)| \,:\, z \in \mathbb{C}\}$, to $P(z_0) = 0$.*

Z obu lematów otrzymujemy natychmiast prosty

Wniosek (zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy, różny od stałej, wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.*

Twierdzenie Weierstrassa. Jeśli f jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych, określoną na kole domkniętym $K_R := \{z \,:\, |z| \leq R\}$, to istnieją takie punkty $z_0, z_1 \in K_R$, że

$$f(z_0) = \inf_{z \in K_R} f(z)\,,$$

$$f(z_1) = \sup_{z \in K_R} f(z)\,.$$

Koło domknięte można zastąpić dowolnym zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Stosujemy to twierdzenie do funkcji ciągłej określonej wzorem $f(z) = |P(z)|$.

Dowód lematu 1. Z nierówności trójkąta dla modułu wynika, że

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \geq$$

$$\geq |z|^n \left(1 - \frac{n \cdot \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{R}\right) \qquad \text{dla } |z| \geq R \geq 1.$$

Biorąc odpowiednio duże R, np. $R = 2(1 + n \max |a_i|)$, przekonujemy się, że nierówności $|P(z)| \geq \frac{1}{2} R^n > |a_0| = |P(0)|$ zachodzą dla wszystkich $|z| \geq R$. Zatem wewnątrz koła domkniętego $\{z \,:\, |z| \leq R\}$ istnieje punkt, w którym wartość funkcji $|P|$ jest mniejsza niż w jakimkolwiek punkcie na zewnątrz tego koła. To zaś, wprost z definicji kresu dolnego, oznacza, że liczby $\inf\{|P(z)| \,:\, z \in \mathbb{C}\}$ oraz $\inf\{|P(z)| \,:\, |z| \leq R\}$ są równe. Drugi z tych kresów jest osiągany w pewnym punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ (to wynika z twierdzenia Weierstrassa).

Jeśli $P(z_0) \notin \mathbb{R}_+$, to obracamy układ współrzędnych – czyli mnożymy wielomian P przez odpowiednio dobraną liczbę zespoloną o module 1.

Dowód lematu 2. Przypuśćmy, wbrew tezie lematu, że $P(z_0) \neq 0$. Wolno założyć, że $P(z_0) = m$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Weźmy liczbę $\varrho \in (0, \min(1, m))$ i zbadajmy zachowanie wielomianu P na okręgu o środku z_0 i promieniu ϱ. Wykorzystując dwumian Newtona, otrzymamy tożsamość

$$(*) \qquad P(z_0 + \varrho e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z_0 + \varrho e^{i\theta})^k =$$

$$= P(z_0) + w_1(z_0) \varrho e^{i\theta} + \ldots + w_n(z_0) \varrho^n e^{in\theta}\,,$$

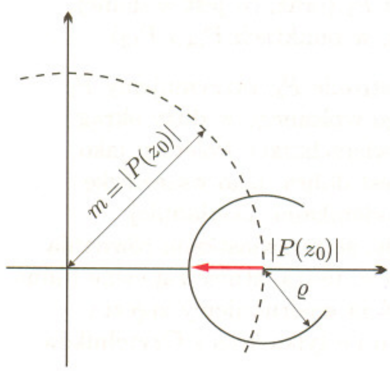
gdzie $w_j(z_0)$ są współczynnikami zależnymi od wielomianu P i liczby z_0, **ale nie od** ϱ. Nietrudno zauważyć, że któraś z liczb $w_j(z_0)$ nie znika, bowiem w przeciwnym razie wielomian P byłby stały na okręgu $|z - z_0| = \varrho$, a wielomian $Q(z) = P(z) - P(z_0)$ miałby nieskończenie wiele pierwiastków! Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $w_k(z_0) \neq 0$. Wtedy z tożsamości $(*)$ otrzymamy

$$|P(z_0 + \varrho e^{i\theta})| = |P(z_0) + w_k(z_0) \varrho^k e^{ik\theta} + \text{wyrazy wyższych rzędów}| \leq$$

$$\leq |P(z_0) + w_k(z_0) \varrho^k e^{ik\theta}| + C \varrho^{k+1}\,,$$

gdzie można wziąć np. $C = 1 + n \cdot \max_j |w_j(z_0)|$.
Kładąc $\theta = \theta_0 := (\pi - \arg w_k(z_0))/k$, dostaniemy stąd (patrz rysunek)

$$|P(z_0 + \varrho e^{i\theta_0})| \leq m - |w_k(z_0)| \varrho^k + C \varrho^{k+1}\,.$$



Kąt θ_0 dobrany jest tak, by wektory $w_k(z_0) \varrho^k e^{ik\theta_0}$ (na rysunku zaznaczony kolorem) oraz $P(z_0)$ miały przeciwne zwroty; wtedy długość ich sumy jest równa różnicy ich długości, a więc mniejsza od $m = |P(z_0)|$. Dla małych ϱ wyrazy wyższych rzędów nie mają wpływu na tę nierówność.

Dla wszystkich dodatnich $\varrho < |w_k(z_0)|/C$ prawa strona tej nierówności jest mniejsza od $m = P(z_0) = |P(z_0)| = \inf |P|$. Ta sprzeczność kończy dowód.