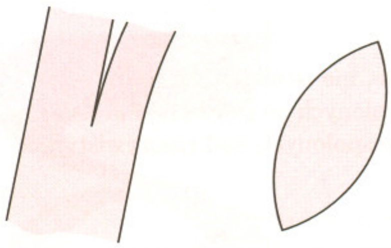


Rys. 4. Pas nacięty wzdłuż półprostej czy też soczewkę można wiernokątnie odwzorować w koło.

Na koniec warto zauważyć, że homografie to, oczywiście, nie jedyne przekształcenia wiernokątne. Nietrudno bowiem spostrzec, że jeśli funkcja ma w danym obszarze różną od zera pochodną, to jest wiernokątna: przybliża się przecież w małym otoczeniu danego punktu przez przekształcenie liniowe, które – jak stwierdziliśmy wcześniej – zachowuje kąty. Skoro zatem funkcji takich jest dość dużo, to może i obszarów, które można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe, jest wiele? Może górna półpłaszczyzna nie była pod tym względem wyjątkowa? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Riemanna. Okazuje się, że każdy obszar jednospójny, czyli taki, w którym każda krzywa zamknięta da się ściągnąć do punktu (patrz rys. 3) i którego brzeg składa się z więcej niż jednego punktu, można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe.

Choć to może być zaskakujące, liczb rzeczywistych nie da się arytmetycznie (a więc za pomocą dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania dowolnego naturalnego stopnia) wyróżnić wśród liczb zespolonych. Oznacza to, że nie ma takiego wyrażenia arytmetycznego, które spełnione byłoby przez liczby zespolone, będące liczbami rzeczywistymi i tylko przez te liczby. Aby można było liczby rzeczywiste zdefiniować, potrzebne są jakieś środki niearytmetyczne – np. sprzężenie, które każdej liczbie zespolonej z przyporządkowuje liczbę zespoloną $\bar{z}$ mającą tę samą część rzeczywistą co z, ale przeciwną część urojoną. Dowód tego faktu jest (jak dowód każdej niemożności) dość technicznie skomplikowany. Polega on na wskazaniu takiego automorfizmu (czyli przekształcenia zachowującego wymienione wyżej działania arytmetyczne) liczb zespolonych, który miesza liczby rzeczywiste z innymi liczbami zespolonymi. Skomplikowana jest właśnie konstrukcja takiego automorfizmu: dla dociekliwych można podać, że konieczny jest tu (podobnie jak do bazy Hamela) pewnik wyboru.

Zadania

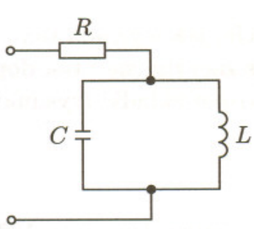
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 931. Przez środek n-kąta foremnego poprowadzono prostą l, a następnie obliczono sumę S kwadratów odległości wierzchołków n-kąta od tej prostej. Udowodnić, że S nie zależy od wyboru l.
Rozwiązanie na str. 13

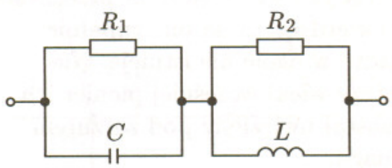
M 932. Niech $A_1A_2A_3A_4$ będzie czworokątem wypukłym. Udowodnić, że $A_1A_3 \cdot A_2A_4 \leq A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.
Rozwiązanie na str. 5

M 933. Wierzchołki każdego z dwóch trójkątów równobocznych na płaszczyźnie ponumerowano liczbami 1, 2, 3 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a następnie wierzchołki o tych samych numerach połączono odcinkami. Udowodnić, że środki trzech otrzymanych w ten sposób odcinków tworzą trójkąt równoboczny (być może zdegenerowany do punktu).
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1



Rys. 2

Impedancja kondensatora o pojemności C jest równa $\frac{1}{C\omega i}$, a cewki o indukcyjności L: $L\omega i$, gdzie ω jest częstością prądu zmiennego w obwodzie. Impedancja opornika jest równa jego oporowi.

F 533. Znaleźć impedancję obwodu przedstawionego na rysunku 1.
Rozwiązanie na str. 9

F 534. Czy można tak dobrać wartości oporów R_1 i R_2 (rys. 2), aby impedancja przedstawionego obwodu była rzeczywista dla całego zakresu częstości?
Rozwiązanie na str. 16