# Pochodna zespolona, czyli funkcje holomorficzne

*Piotr HAJŁASZ*

Obiektem naszych rozważań będą funkcje zespolone, czyli funkcje zmiennej zespolonej przyjmujące wartości zespolone. Przykładem takiej funkcji jest wielomian $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, gdzie współczynniki $a_n, \dots, a_0$ są liczbami zespolonymi. Innym przykładem jest funkcja wymierna – iloraz dwóch wielomianów, a w szczególności homografia $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

O wielomianach i homografiach można przeczytać więcej w artykułach na stronach 2 i 8.

Pochodną funkcji zespolonej określamy na obraz i podobieństwo pochodnej funkcji rzeczywistej. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna (w sensie zespolonym) w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeżeli istnieje granica

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

Granicę tę oznaczamy przez $f'(z_0)$ i nazywamy *pochodną (w sensie zespolonym)* funkcji $f$.

Dla usunięcia wątpliwości podajmy precyzyjną definicję granicy $(*)$. Mówimy, że granica ta jest równa $f'(z_0)$, jeżeli dla każdego ciągu liczb zespolonych $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ iloraz liczb zespolonych $(f(z_0+h_n) - f(z_0))/h_n$ dąży do $f'(z_0)$. Przypomnijmy, że ciąg liczb zespolonych $w_n$ dąży do $w$, jeżeli odległość $w_n$ od $w$ dąży do 0.

Funkcje różniczkowalne w sensie zespolonym nazywamy funkcjami *holomorficznymi.*

Pochodne zespolone mają podobne własności do pochodnych rzeczywistych: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ o ile $g \neq 0$.

Dokładniej: o funkcji holomorficznej zakładamy, że jest określona w zbiorze otwartym i że jest różniczkowalna w sensie zespolonym w każdym punkcie dziedziny. Funkcje holomorficzne nazywane są też *funkcjami analitycznymi.*

Wielomian jest funkcją holomorficzną, różniczkujemy go tak samo jak wielomian zmiennej rzeczywistej $w'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \dots + a_1$.

Wiele funkcji takich jak np. $\mathrm{e}^x$, $\sin x$, $\cos x$,... ma swoje odpowiedniki wśród funkcji zmiennej zespolonej. Funkcję $\mathrm{e}^z$ definiujemy wzorem

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}.$$

Jeśli więc $z = x + i\cdot 0$ jest liczbą rzeczywistą, to wartość $\mathrm{e}^z$ jest równa wartości funkcji rzeczywistej $\mathrm{e}^x$, którą to funkcję (mam nadzieję) niektórzy z Czytelników mieli szansę poznać w szkole średniej.

Liczby rzeczywiste $x$ utożsamiamy z liczbami zespolonymi postaci $x + i\cdot 0 = (x, 0)$, czyli przy interpretacji geometrycznej liczbom rzeczywistym odpowiada oś $x$.

Różniczkując wyraz po wyrazie szereg potęgowy występujący w definicji $\mathrm{e}^z$, otrzymujemy... z powrotem ten sam szereg, czyli $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

*Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Jest to funkcja zmiennej zespolonej $z$. Szereg potęgowy wolno różniczkować wyraz po wyrazie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n (z-z_0)^{n-1},$$

a więc szereg potęgowy określa funkcję holomorficzną.

Można udowodnić, że dla $z = x + iy$ jest $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$, stąd zaś łatwo otrzymujemy słynne *wzory Eulera:*

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}}{2}.$$

Wzory te podsuwają pomysł rozszerzenia definicji funkcji $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ na przypadek zmiennej zespolonej

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}.$$

Korzystając z faktu, że $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$, łatwo wykazać równości $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$. Również łatwo sprawdzić, że $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Zdarzają się jednak niespodzianki: $\cos i = (\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e})/2 > 1$.

Tak więc $\sin z$, $\cos z$, podobnie jak $\mathrm{e}^z$, są funkcjami holomorficznymi.

Funkcje holomorficzne mają ładną interpretację geometryczną. Po pierwsze, są one odwzorowaniami ze zbioru na płaszczyźnie w zbiór na płaszczyźnie. Otóż funkcje holomorficzne o pochodnej różnej od zera to dokładnie odwzorowania *wiernokątne*, czyli takie, które zachowują kąty i orientację. Patrz również artykuł na stronie 2.

Wbrew pozorom podobieństw między funkcjami zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej nie jest zbyt wiele. Funkcje holomorficzne mają bowiem wiele zdumiewających, magicznych wręcz, własności.

Jeżeli funkcja zmiennej rzeczywistej jest różniczkowalna, to nie musi być ona dwukrotnie różniczkowalna. W przypadku pochodnej zespolonej jest zupełnie inaczej: każda funkcja holomorficzna $f(z)$ ma nieskończenie wiele pochodnych! Co więcej, w otoczeniu dowolnego punktu $z_0$ może zostać ona zapisana w postaci szeregu potęgowego (szeregu Taylora)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad \text{gdzie } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Funkcja $f(x) = x^2$ dla $x \geq 0$ i $-x^2$ dla $x < 0$ jest różniczkowalna. Jej pochodna to $f'(x) = 2|x|$, więc funkcja $f$ nie ma drugiej pochodnej dla $x = 0$. Można podać przykład funkcji różniczkowalnej, która nie ma drugiej pochodnej w żadnym punkcie.

Może się zdarzyć, że funkcja $f(z)$ ma *osobliwość* w jakimś punkcie, tzn. $f(z)$ nie jest zdefiniowane w jakimś punkcie. Na przykład $f(z) = (z-i)^{-7}$ ma osobliwość w punkcie $z = i$, a funkcja $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ ma osobliwość dla $z = 0$.

Zadanie. Korzystając ze wzorów podanych w tekście, przedstawić funkcje $\sin z$ i $\cos z$ w postaci szeregu potęgowego dla $z_0 = 0$.

Jeżeli funkcja $f(z)$ ma osobliwość w punkcie $z_0$, to możemy w tym punkcie wyliczyć pewną „magiczną" liczbę $\operatorname{res}_{z_0} f$, zwaną *residuum* funkcji $f$ w punkcie $z_0$. Liczbę tę obliczamy za pomocą konkretnego i nietrudnego wzoru (niestety, z braku miejsca nie przytaczamy definicji residuum). Magia tej liczby wynika z jej zdumiewających własności.

Dokładniej: residuum $\operatorname{res}_{z_0} f$ określone jest w przypadku, gdy funkcja $f$ nie jest określona w $z_0$, natomiast jest holomorficzna w pewnym otoczeniu $z_0$. Tak jest w przypadku funkcji $(z-i)^{-7}$ oraz $e^{1/z}$.

Residuum pozwala, między innymi, na obliczenie wielce skomplikowanych całek, szeregów, iloczynów nieskończonych..., w których wcale nie ma mowy o liczbach zespolonych! W szczególności pozwala ono na obliczenie wielu całek $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, w których $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą.

Pisząc „dla wielu całek", chcieliśmy zaznaczyć, że w sformułowaniu twierdzenia zostały pominięte pewne dodatkowe założenia.

Dla wielu takich całek postępujemy, jak następuje. Funkcję $f(x)$ zamieniamy na funkcję zespoloną $f(z)$. Funkcja $f(z)$ może mieć osobliwości w wielu punktach. Załóżmy, że w górnej półpłaszczyźnie (tzn. dla $z = x + iy$, $y > 0$) ma ona osobliwości w punktach $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f\,.$$

Metoda ta pozwala, między innymi, na łatwe obliczenie całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 < b\,.$$

Funkcje holomorficzne mają bardzo liczne zastosowania poza samą matematyką. Stosuje się je, między innymi, w elektronice, aerodynamice, hydrodynamice, optyce i wielu innych działach fizyki.

Postępujemy tak. Funkcję, którą chcemy scałkować, zamieniamy na funkcję zmiennej zespolonej $f(z) = 1/(z^2 + 2az + b)$. Mianownik ma dwa pierwiastki zespolone $z_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$, czyli funkcja $f(z)$ ma osobliwość w dwóch punktach: $z_1$ i $z_2$. Tylko jedna z tych osobliwości znajduje się w górnej półpłaszczyźnie, $z_1 = -a + i\sqrt{b - a^2}$. Wprost z definicji residuum wynika, że $\operatorname{res}_{z_1} f = 1/(2i\sqrt{b - a^2})$, skąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2ax + b} = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f = \frac{\pi}{\sqrt{b - a^2}}\,.$$

Jest wiele książek poświęconych funkcjom holomorficznym, na przykład: F. Leja *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1979.

Ta zdumiewająco prosta metoda (i jej modyfikacje) jest najbardziej efektywną metodą, pozwalającą na obliczanie skomplikowanych całek, w których *a priori* nie ma mowy o liczbach zespolonych.

Inne zastosowania dotyczą teorii liczb. Jedno z najbardziej spektakularnych to tzw. *twierdzenie o liczbach pierwszych*. Twierdzenie to, udowodnione w 1896 roku przez Hadamarda i Vallée-Poussina, jest jednym z największych osiągnięć matematyki XIX wieku. A oto i ono.

Dowód twierdzenia o liczbach pierwszych można znaleźć w książce: W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1990.

*Jeżeli $\pi(x)$ jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż $x$, to* $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1$.

Twierdzenie to głosi, że dla dużych $x$ liczba $\pi(x)$ jest równa w przybliżeniu $\frac{x}{\ln x}$.

Około roku 1800 Gauss wysunął przypuszczenie, że twierdzenie to powinno być prawdziwe, nie umiał go jednak udowodnić. Dopiero zastosowanie bardzo zaawansowanych metod funkcji holomorficznych przyniosło efekt. Otóż nietrudno udowodnić następujący *wzór Eulera*

Gauss wysunął swoją hipotezę, badając funkcję $\pi(x)$ dla konkretnych wartości $x$. Korzystał z metod statystyki matematycznej.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}\,,$$

gdzie $s > 1$, $p_n$ zaś jest $n$-tą liczbą pierwszą. Wzór ten sprowadza badanie funkcji $\pi(x)$ do badania funkcji $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (*funkcja dzeta Riemanna*).

Do niedawna najsłynniejszą hipotezą w matematyce było *Wielkie Twierdzenie Fermata*, zostało ono jednak udowodnione przez A. Wilesa w 1994 roku, co wykluczyło je z grona szlachetnych hipotez. Heroiczny wyczyn Wilesa został opisany w książkach: A.D. Aczel, *Wielkie Twierdzenie Fermata*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998 oraz S. Singh, *Tajemnica Fermata*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1999.

Genialny pomysł polega na takim rozszerzeniu definicji funkcji $\zeta$, by za $s$ móc podstawiać liczby zespolone (to nie jest proste!). Wówczas $\zeta$ staje się funkcją holomorficzną z jednym punktem osobliwym dla $s = 1$. Właśnie badanie funkcji holomorficznej $\zeta$ było podstawą dowodu twierdzenia o liczbach pierwszych. Funkcja $\zeta$ nadal kryje w sobie wiele tajemnic. Największa z nich to słynna *hipoteza Riemanna*, która mówi, gdzie znajdują się miejsca zerowe funkcji $\zeta$. Obok *hipotezy Poincarégo* jest to najsłynniejsza hipoteza w matematyce.