O pożytkach z nieistniejących zwierząt

O tym, jak rozwiązać pewne „rzeczywiste” problemy, korzystając ze świata liczb zespolonych, można przeczytać w tym numerze *Delty*.

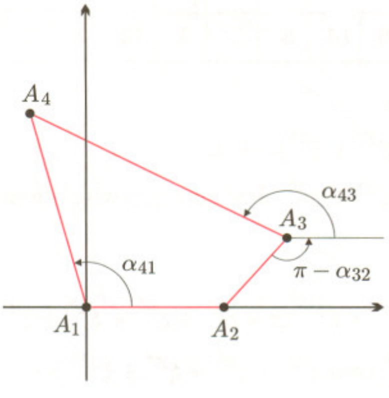
Często zdarza się tak, że aby rozwiązać problem z jakiejś dziedziny, najlepiej wyjść poza jej ramy, „na zewnątrz” znaleźć rozwiązanie i triumfalnie powrócić do pierwotnego zagadnienia, choćby nawet istnienie świata, w którym rozwiązanie znaleziono, było nieco… wątpliwe.

Jest to prawda znana od stuleci, bowiem już całe wieki temu potrafiono – np. dla powiększenia majątku – skorzystać ze „zwierząt, które nie istnieją” (a w każdym razie z takich, których my nie mamy). Poniższa historia jest tego ilustracją (opowieść wzorowana jest na dawno chyba na tych łamach nie cytowanej *Lilavati* Szczepana Jeleńskiego):

Pewien człowiek pozostawił w spadku trzem swoim synom 17 koni; zaznaczył jednak w testamencie, że najstarszy ma otrzymać połowę, średni jedną trzecią, a najmłodszy jedną dziewiątą tej spuścizny, przy czym żadnego konia nie można zabić w celu podzielenia się jego mięsem. Sprzedaż koni na targu i podział pieniędzy też nie wchodziły w grę. Całe nieszczęście polegało oczywiście na tym, że 17 nie dzieli się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 9: połowa z 17 to $8\frac{1}{2}$, jedna trzecia to $5\frac{2}{3}$, a jedna dziewiąta to $1\frac{8}{9}$. Bracia poszli więc do znanego z mądrości starca, a on podpowiedział im takie rozwiązanie: pożyczcie od sąsiada jeszcze jednego konia i dopiero wówczas dokonajcie podziału. Tak też uczynili i wtedy najstarszy brat otrzymał 9 koni, a średni 6. Najmłodszy zmartwiony (bo jego bracia otrzymali więcej, niż im się należało, a więc musi to być jego kosztem) zagląda do stajni i cóż widzi? Trzy rumaki! Mógł nie tylko oddać sąsiadowi owego pożyczonego konia, ale także sam otrzymał więcej, niż się spodziewał.

Widać, gdzie leży wyjaśnienie tego radosnego dla wszystkich finału: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, a zatem ojciec nie rozdzielił *całego* swego majątku między synów. Słowa testamentu można jednak rozumieć tak: najstarszy syn ma dostać *nie mniej niż* połowę koni, średni *nie mniej niż* jedną trzecią, a najmłodszy *nie mniej niż* jedną dziewiątą. I jeszcze jeden wniosek: warto mieć dobre układy z sąsiadami…

Małą Deltę przygotował Marcin ADAMSKI



Rozwiązanie zadania M 932.
Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych tak, by A_1 był jego środkiem, a A_2 leżał na dodatniej półosi OX. Niech z_1, z_2, z_3, z_4 $(z_1=0)$ będą liczbami zespolonymi reprezentującymi wierzchołki A_1, A_2, A_3, A_4 odpowiednio. Wtedy $A_iA_j=|z_i-z_j|$ $(i,j=1,2,3,4)$. Mamy następującą, łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$(z_2-z_1)(z_4-z_3)+(z_3-z_2)(z_4-z_1)=(z_4-z_2)(z_3-z_1).$$

Z nierówności $|u+v|\le|u|+|v|$ spełnionej dla dowolnych liczb zespolonych u, v wynika

$$|z_2-z_1|\cdot|z_4-z_3|+|z_3-z_2|\cdot|z_4-z_1|\ge|z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1|,$$

czyli żądana nierówność. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy argumenty liczb $(z_2-z_1)(z_4-z_3)$ i $(z_3-z_2)(z_4-z_1)$ są równe. Niech $\alpha_{ij}=\operatorname{Arg}(z_i-z_j)$ dla $i\ne j$. Ponieważ przy mnożeniu liczb zespolonych argumenty dodają się, więc równość argumentów liczb $(z_2-z_1)(z_4-z_3)$ i $(z_3-z_2)(z_4-z_1)$ oznacza $\alpha_{41}+\alpha_{32}=\alpha_{21}+\alpha_{43}=\alpha_{43}$. Mamy dalej

$$\angle(A_2A_1A_4)+\angle(A_2A_3A_4)=\alpha_{41}+[2\pi-(\pi-\alpha_{32})-\alpha_{43}]=\pi+(\alpha_{41}+\alpha_{32}-\alpha_{43})$$

(p. rys.), a więc równość $\alpha_{41}+\alpha_{32}=\alpha_{21}+\alpha_{43}=\alpha_{43}$ jest równoważna równości $\angle(A_2A_1A_4)+\angle(A_2A_3A_4)=\pi$, co należało wykazać.