Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2000

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z matematyki nr 407, 408

Redaguje Marcin E. KUCZMA

407. Dana jest liczba naturalna n oraz n-elementowy zbiór M, zawarty w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, nie zawierający żadnej pary liczb o sumie równej $2n+1$. Suma wszystkich liczb ze zbioru M jest znana i wynosi S. Obliczyć sumę kwadratów wszystkich liczb ze zbioru M.

408. Przez punkt P, leżący wewnątrz trójkąta ABC o środku ciężkości G, prowadzimy proste PD, PE, PF równoległe odpowiednio do prostych AG, BG, CG; punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Wykazać, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od położenia punktu P.

Zadanie **408** zaproponowała pani Joanna Jaszuńska z Warszawy.

UWAGA: listy ligowe **Klubu 44 M** i **F** tym razem wyjątkowo na str. 16.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2000

Przypominamy treść zadań:

403. Ciągi $b(0)$, $b(1)$, $b(2)$, … oraz $d(0)$, $d(1)$, $d(2)$, … są określone wzorami: $b(0) = d(0) = 1$, $b(n+1) = 2^{b(n)}$, $d(n+1) = 10^{d(n)}$. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $b(n) > d(44)$.

404. Udowodnić, że liczba wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne, jest równa wartości, jaką przyjmuje w punkcie $x = 0$ pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$.

403. Udowodnimy, że dla liczb naturalnych $n \geq 2$ zachodzi nierówność podwójna

$$6d(n-1) < b(n+2) < d(n).$$

Dla $n = 2$ jest to prawda ($6 \cdot 10 < 2^{16} < 10^{10}$). Weźmy liczbę naturalną $n \geq 2$ i załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla tej liczby n. Wówczas

$$b(n+3) = 2^{b(n+2)} \begin{cases} < 2^{d(n)} < 10^{d(n)} = d(n+1), \\ > 2^{6 \cdot d(n-1)} = 64^{d(n-1)} > 6^{d(n-1)} \cdot 10^{d(n-1)} = 6^{d(n-1)} \cdot d(n) > 6d(n); \end{cases}$$

otrzymaliśmy tezę indukcyjną. Z udowodnionej nierówności wynika, że $b(46) < d(44)$ oraz $b(47) > 6d(44) > d(44)$. Zatem szukana liczba jest równa 47.

404. Niech $S_{n,k}$ będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na k niepustych rozłącznych podzbiorów ($n \geq k \geq 1$). Jest jasne, że

$$(1) \qquad S_{n,1} = S_{n,n} = 1 \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Weźmy pod uwagę dowolny podział zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ na k niepustych rozłącznych podzbiorów ($2 \leq k \leq n$). Podział taki uzyskujemy z podziału zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na k podzbiorów przez dołączenie elementu $n+1$ do jednego z tych k podzbiorów, albo z podziału zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na $k-1$ podzbiorów przez utworzenie dodatkowego podzbioru jednoelementowego $\{n+1\}$. To daje zależność rekurencyjną

$$(2) \qquad S_{n+1,\,k} = kS_{n,k} + S_{n,\,k-1} \qquad \text{dla} \quad n \geq k \geq 2.$$

Uwaga. Liczby $S_{n,k}$ są zwane *liczbami Stirlinga drugiego rodzaju*, a suma $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S_{n,k}$ to n-ta *liczba Bella*.

Zajmiemy się teraz przedstawieniem pochodnej n-tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$. Wykażemy, że ma ona postać

$$(3) \qquad f^{(n)}(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\, e^{kx}\Big) f(x)$$

dla pewnych stałych $A_{n,1}$, …, $A_{n,n}$. Dla $n = 1$ wzór (3) zachodzi ze stałą $A_{1,1} = 1$, bowiem $f'(x) = e^x f(x)$. Ustalmy $n \geq 1$. Jeśli równość (3) zachodzi dla tej liczby n (i pewnych stałych $A_{n,k}$), to różniczkując tę równość otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k} \cdot k e^{kx}\Big) f(x) + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\, e^{kx}\Big) e^x f(x) = \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} kA_{n,k}\, e^{kx} + \sum_{k=2}^{n+1} A_{n,\,k-1}\, e^{kx}\Big) f(x) = \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,\,k}\, e^{kx}\Big) f(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4) \qquad A_{n+1,\,1} = A_{n,1}, \qquad A_{n+1,\,n+1} = A_{n,n},$$

$$(5) \qquad A_{n+1,\,k} = kA_{n,k} + A_{n,\,k-1} \qquad \text{dla} \quad n \geq k \geq 2.$$

Stąd przez indukcję wynika słuszność wzoru (3) dla stałych $A_{n,k}$ określonych wzorami (4), (5) (ze startem $A_{1,1} = 1$).

Z równości (4) oczywiście wynika, że $A_{n,1} = A_{n,n} = 1$ dla wszystkich n. Tak więc zależności rekurencyjne dla liczb $A_{n,k}$ są identyczne ze wzorami (1), (2) dla liczb $S_{n,k}$. Zatem $S_{n,k} = A_{n,k}$ dla $n \geq k \geq 1$.

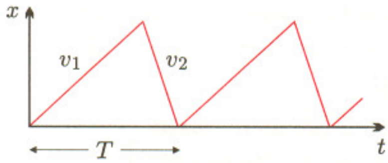
Pozostaje zauważyć, że $f(0) = 1$, i wobec tego

$$f^{(n)}(0) = \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\Big) f(0) = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$$

jest liczbą wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne.

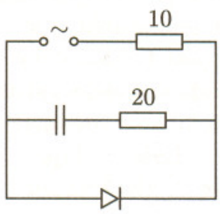
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2000

304. Poziomy stół wykonuje okresowy ruch poziomy według wykresu (rys. 1). Jeśli na tym stole położymy klocek i zaczekamy odpowiednio długo, to jak będzie zależeć jego średnia prędkość przemieszczania się od współczynnika tarcia μ, okresu T ruchu stołu oraz prędkości ruchu jednostajnego stołu v_1 i v_2?



Rys. 1

305. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody (doskonałej, tzn. o zerowym oporze w kierunku przewodzenia i nieskończonym oporze w kierunku zaporowym), oporników 10 Ω i 20 Ω oraz kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Do jakiego napięcia naładuje się kondensator po długim czasie? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2000

Przypominamy treść zadań:

300. Przedstawiony na rysunku 3 przekrój pochylni składa się z odcinka o długości $l = 2$ m nachylonego pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu oraz dwóch łuków o promieniu $R = 10$ m gładko łączących ten odcinek z półprostymi poziomymi. Na górnym poziomie postawiono wózek i nadano mu bardzo niewielką prędkość w prawo. Czy w czasie zjazdu wózek oderwie się jedną parą kółek od podłoża? Korpus wózka jest jednorodną płytką prostopadłościenną o długości $d = 5$ cm i wysokości $h = 20$ cm (trzeci wymiar jest nieistotny), osie kółek są osadzone na końcach dolnego boku płytki (tzn. w odległości 5 cm), a masę kółek, ich promień i tarcie należy pominąć. Uwaga: wystarczające jest rozwiązanie przybliżone, słuszne dla podanych wartości liczbowych.


Rys. 3

301. Z jednorodnego drutu o oporze ρ na jednostkę długości wykonano pięciokąt foremny o boku a. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej B w środku tego pięciokąta, jeśli do dwóch sąsiednich wierzchołków pięciokąta przyłączyć źródło napięcia U? Pominąć pole przewodów doprowadzających i przyjąć względną przenikalność magnetyczną ośrodka równą 1.

300. Rozważmy okolicę końca pochylni, gdzie wózek przestaje zjeżdżać po łuku, a zaczyna poruszać się po dolnym poziomie. Z punktu widzenia dynamiki ruchu obrotowego wokół środka masy jest to przejście od ruchu obrotowego z prędkością kątową $\omega = v/R$ (gdzie v – prędkość liniowa, ze względu na małe rozmiary wózka w przybliżeniu jednakowa dla różnych jego punktów) do spoczynku (braku obrotu). Ta zmiana prędkości kątowej następuje w przedziale czasu od minięcia końca pochylni przez pierwszą oś wózka do minięcia jej przez drugą oś, zatem pomijając zmiany prędkości liniowej, otrzymujemy czas $t = d/v$ i przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \omega/t = v^2/Rd$. Podstawiając do II zasady dynamiki ruchu obrotowego znalezione ε oraz moment bezwładności $I = (1/12)m(d^2 + h^2)$, znajdujemy moment siły względem środka $M = I\varepsilon$; z drugiej strony moment ten nie może przekraczać wartości obliczonej dla przypadku granicznego, w którym przednie koła prawie odrywają się od podłoża. Wtedy $M_{\max} = Fd/2$, gdzie siłę reakcji podłoża F podstawimy równą sumie siły ciężkości i siły odśrodkowej, tzn. $F = mg + mv^2/R$. Otrzymaliśmy zatem warunek przejazdu na czterech kołach w postaci nierówności

$$\frac{1}{12}m\left(d^2 + h^2\right)\frac{v^2}{Rd} \le \frac{md}{2}\left(\mathrm{g} + \frac{v^2}{R}\right).$$

Uwzględnienie w tym rachunku siły odśrodkowej mv^2/R może budzić wątpliwości, gdyż rozpatrujemy tu przejście od łuku do prostej poziomej, na której ta siła nie występuje. Jeśliby jednak człon ten pominąć, to nierówność zostałaby naruszona jeszcze silniej, czyli wyciągnięty wniosek pozostaje i tak w mocy.

Jako wniosek z zasady zachowania energii podstawiamy tu

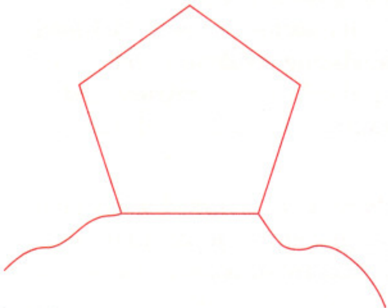
$$v^2 = 2\mathrm{g}(2R(1 - \cos\alpha) + l\sin\alpha),$$

a następnie możemy skrócić mg. Po wprowadzeniu danych liczbowych przekonujemy się, że wartość lewej strony przekracza wartość prawej o około 20%, czyli przednie koła zerwą kontakt z podłożem.

Wyprowadzając z zasady zachowania energii wzór na v^2, pominęliśmy energię ruchu obrotowego wózka wokół środka masy, gdyż jest kilkadziesiąt tysięcy razy mniejsza od energii ruchu postępowego.

Innymi „podejrzanymi" punktami są: przejście od wypukłego łuku do równi pochyłej oraz przejście od równi pochyłej do wklęsłego łuku – według obliczeń autora w żadnym z nich nie nastąpi oderwanie się kółek od podłoża. Można także rozpatrywać sam ruch po łuku, który ze względu na nachylenie jest przyspieszony, a zatem w ruchu obrotowym także występuje przyspieszenie – jednak tutaj wymagany moment siły jest co najmniej kilkadziesiąt razy mniejszy od maksymalnego momentu sił reakcji kółek, więc oderwanie nie nastąpi z całą pewnością.

301. Pole magnetyczne w środku pięciokąta jest sumą pól wytworzonych przez jego pięć boków, przy czym dla czterech boków połączonych szeregowo (górna gałąź na rys. 4) wkład ten jest jednakowy co do kierunku, zwrotu i wartości, natomiast dla piątego (dolnego) boku ma przeciwny zwrot. Ponieważ opór dolnego boku jest czterokrotnie mniejszy, więc płynie przez niego czterokrotnie większy prąd i widzimy, że wypadkowe pole magnetyczne jest równe zeru. Taki sam wynik otrzymalibyśmy dla dowolnego n-kąta foremnego, przy zasilaniu dołączonym do dowolnych dwóch jego wierzchołków (lub w środkach boków).


Rys. 4