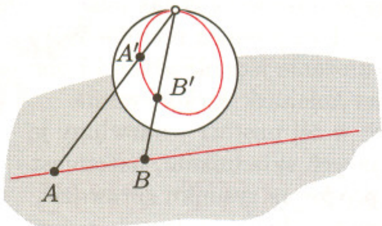
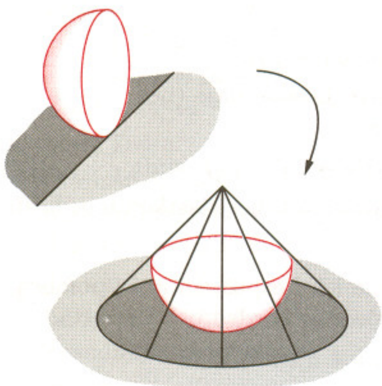
Homografie i przekształcenia wiernokątne

Witold SADOWSKI



Rys. 1. Rzut stereograficzny. Punktowi A przypisujemy punkt A'. Obrazem prostej AB jest okrąg na sferze przechodzący przez punkty A', B' oraz biegun północny (∞).

Odwzorować półpłaszczyznę w koło. I to tak, by kąty pomiędzy dowolnymi krzywymi na półpłaszczyźnie i ich obrazami w kole były takie same… Łatwo powiedzieć! Ale czy to w ogóle możliwe? Jak zmieścić nieograniczoną półpłaszczyznę w maleńkim kole? I jeszcze nie powyginać kątów?! To jakieś magiczne sztuczki… Ale spróbujemy. Postawmy najpierw na płaszczyźnie sferę i zrzutujmy całą płaszczyznę na sferę tak, jak pokazuje rysunek 1. Nasza półpłaszczyzna przejdzie na „miskę” ustawioną pionowo. Gdybyśmy teraz tę „miskę” ustawili poziomo (rys. 2), a potem zrzutowali w drugą stronę (ze sfery na płaszczyznę), to otrzymalibyśmy wnętrze koła. Być może znaleźliśmy więc to odwzorowanie, o które chodzi, o ile przy rzutowaniu na sferę (i ze sfery) kąty między krzywymi zostały zachowane.



Rys. 2. Obracamy miskę i rzutujemy.

Na szczęście jest tak w istocie, co można dość żmudnie, ale nietrudno wykazać. Wiemy zatem, jak można odwzorować półpłaszczyznę w koło, ale wzoru na to przekształcenie jak nie mieliśmy, tak nie mamy. Czas zatem go poszukać. Moglibyśmy, oczywiście, spróbować zapisać formalnie to, co powiedzieliśmy dotąd, ale pójdźmy inną drogą. Wykorzystamy fakt, że dowolnemu punktowi płaszczyzny odpowiada liczba zespolona. Zauważmy najpierw, że przy rzutowaniu na sferę obrazem płaszczyzny była sfera bez punktu (bez bieguna północnego). Dodajmy ten punkt do sfery, co odpowiadać będzie dodaniu do płaszczyzny punktu ∞. Otrzymamy tzw. płaszczyznę domkniętą. (Taka płaszczyzna jest dla nas wygodniejsza, gdyż prosta $y=0$ z dołączonym punktem ∞, jako brzeg górnej półpłaszczyzny, przejść ma teraz na brzeg koła, czyli okrąg.)

Przekształcenie tożsamościowe jest homografią. Przekształcenie odwrotne do homografii oraz złożenie dwóch homografii też jest homografią. Homografie tworzą zatem grupę odwzorowań płaszczyzny domkniętej na siebie. Grupą odwzorowań „zwykłej płaszczyzny” na siebie jest grupa przekształceń liniowych.

Zastanówmy się, jakie mogą być najprostsze i „najprzyzwoitsze” przekształcenia na płaszczyźnie domkniętej? Na „zwykłej płaszczyźnie” wiadomo: liniowe $az+b$. A na domkniętej można jeszcze „swobodnie” przechodzić na punkt ∞, więc przekształcenie $\frac{1}{z}$ też jest niczego sobie. Ogólnie rzecz biorąc interesować nas będą przekształcenia postaci $\frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad-bc\neq 0$ (po co ten warunek?), a,b,c,d – liczby zespolone. Nazywają się one *homografiami.* Jak widać ze wzoru, homografia powstaje ze złożenia trzech przekształceń: najpierw mamy przekształcenie liniowe $w=cz+d$, potem wykonujemy tzw. *inwersję* $s=\frac{1}{w}$, a na koniec znów przekształcenie liniowe $As+B$, którego współczynniki A i B Czytelnik z łatwością wyliczy. Ponieważ przekształcenie liniowe $az+b$ to złożenie podobieństwa spiralnego wyznaczonego przez liczbę a (patrz str. 1) z przesunięciem o wektor $\mathbf{b}$, więc przy tym przekształceniu kąty pozostają bez zmian. Można również wykazać, że inwersja $\frac{1}{z}$ zachowuje kąty między krzywymi, skąd łatwo już dostrzec, że także dowolna homografia jest przekształceniem wiernokątnym (zachowującym kąty między krzywymi). Podobnie jak rzut stereograficzny (rys. 1) homografie zamieniają proste w proste (ewentualnie w okręgi) oraz okręgi w okręgi (ewentualnie w proste). Skorzystajmy z tej własności i wybierzmy trzy różne punkty prostej $y=0$ (np. -1, 0 oraz 1), „nakazując im” przejście w trzy różne punkty okręgu jednostkowego (np. odpowiednio w i, -1, $-i$). Otrzymamy w ten sposób trzy łatwe równania, z których natychmiast wyliczymy wzór homografii $\frac{z-i}{z+i}$. Ponieważ prosta $y=0$ (z dołączonym punktem ∞) jest brzegiem zarówno dolnej, jak i górnej półpłaszczyzny, wystarczy teraz tylko sprawdzić, czy dowolny punkt z wnętrza górnej półpłaszczyzny (np. i) znajdzie się we wnętrzu koła. Łatwo spostrzec, że jest tak w istocie. W ten sposób okazuje się ostatecznie, że wzór naszego przekształcenia ma wyjątkowo prostą postać, gdy użyjemy do jego wyrażenia liczb zespolonych. Można zaproponować Czytelnikowi wyrażenie tego wzoru za pomocą współrzędnych rzeczywistych i rozstrzygnięcie, czy również „rzeczywisty wzór” jest „najprostszy z możliwych”.

Rys. 3. Przykład obszaru jednospójnego (a) i obszaru, który taki nie jest (b).

Rys. 4. Pas nacięty wzdłuż półprostej czy też soczewkę można wiernokątnie odwzorować w koło.

Na koniec warto zauważyć, że homografie to, oczywiście, nie jedyne przekształcenia wiernokątne. Nietrudno bowiem spostrzec, że jeśli funkcja ma w danym obszarze różną od zera pochodną, to jest wiernokątna: przybliża się przecież w małym otoczeniu danego punktu przez przekształcenie liniowe, które – jak stwierdziliśmy wcześniej – zachowuje kąty. Skoro zatem funkcji takich jest dość dużo, to może i obszarów, które można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe, jest wiele? Może górna półpłaszczyzna nie była pod tym względem wyjątkowa? Odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie Riemanna. Okazuje się, że każdy obszar jednospójny, czyli taki, w którym każda krzywa zamknięta da się ściągnąć do punktu (patrz rys. 3) i którego brzeg składa się z więcej niż jednego punktu, można wiernokątnie odwzorować w koło jednostkowe.

Choć to może być zaskakujące, liczb rzeczywistych nie da się arytmetycznie (a więc za pomocą dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania dowolnego naturalnego stopnia) wyróżnić wśród liczb zespolonych. Oznacza to, że nie ma takiego wyrażenia arytmetycznego, które spełnione byłoby przez liczby zespolone, będące liczbami rzeczywistymi i tylko przez te liczby. Aby można było liczby rzeczywiste zdefiniować, potrzebne są jakieś środki niearytmetyczne – np. sprzężenie, które każdej liczbie zespolonej z przyporządkowuje liczbę zespoloną $\bar{z}$ mającą tę samą część rzeczywistą co z, ale przeciwną część urojoną. Dowód tego faktu jest (jak dowód każdej niemożności) dość technicznie skomplikowany. Polega on na wskazaniu takiego automorfizmu (czyli przekształcenia zachowującego wymienione wyżej działania arytmetyczne) liczb zespolonych, który miesza liczby rzeczywiste z innymi liczbami zespolonymi. Skomplikowana jest właśnie konstrukcja takiego automorfizmu: dla dociekliwych można podać, że konieczny jest tu (podobnie jak do bazy Hamela) pewnik wyboru.

Zadania

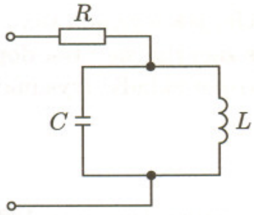
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 931. Przez środek n-kąta foremnego poprowadzono prostą l, a następnie obliczono sumę S kwadratów odległości wierzchołków n-kąta od tej prostej. Udowodnić, że S nie zależy od wyboru l.
Rozwiązanie na str. 13

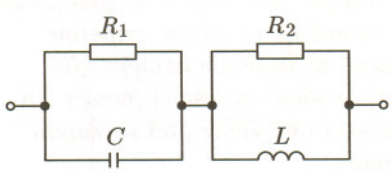
M 932. Niech $A_1A_2A_3A_4$ będzie czworokątem wypukłym. Udowodnić, że $A_1A_3 \cdot A_2A_4 \leq A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.
Rozwiązanie na str. 5

M 933. Wierzchołki każdego z dwóch trójkątów równobocznych na płaszczyźnie ponumerowano liczbami 1, 2, 3 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a następnie wierzchołki o tych samych numerach połączono odcinkami. Udowodnić, że środki trzech otrzymanych w ten sposób odcinków tworzą trójkąt równoboczny (być może zdegenerowany do punktu).
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1



Rys. 2

Impedancja kondensatora o pojemności C jest równa $\frac{1}{C\omega i}$, a cewki o indukcyjności L: $L\omega i$, gdzie ω jest częstością prądu zmiennego w obwodzie. Impedancja opornika jest równa jego oporowi.

F 533. Znaleźć impedancję obwodu przedstawionego na rysunku 1.
Rozwiązanie na str. 9

F 534. Czy można tak dobrać wartości oporów R_1 i R_2 (rys. 2), aby impedancja przedstawionego obwodu była rzeczywista dla całego zakresu częstości?
Rozwiązanie na str. 16