10/00 (34)

Γlimatias ($\lim_{n\to\infty}$)

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (23)

ZADANIE: Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x \mathrm{d}x,$$

gdzie n jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie: Oznaczamy szukaną całkę przez I_n, a następnie wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x \mathrm{d}x = \sin nx \cdot \left(\frac{-\cos 2000x}{2000}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} n \cos nx \cdot \left(\frac{-\cos 2000x}{2000}\right) \mathrm{d}x = \frac{n}{2000}\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos 2000x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n}{2000} \cos nx \cdot \left(\frac{\sin 2000x}{2000}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{n}{2000}\int_0^{2\pi} (-n \sin nx) \cdot \left(\frac{\sin 2000x}{2000}\right) \mathrm{d}x = \frac{n^2}{4000000}\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin 2000x \mathrm{d}x = \frac{n^2}{4000000} \cdot I_n \,,$$

skąd $\frac{4000000 - n^2}{4000000} \cdot I_n = 0$. Zatem $I_n = 0$.

Odpowiedź: Wartość danej całki oznaczonej wynosi 0.

JWR

GRY (17)

Pozycja	Liczba Grundy'ego
3 kręgle	
2	2
1	1
1 , 1	$1 +_2 1 = 0$
4 kręgle	
3	3
2	2
1 , 2	$1 +_2 2 = 3$
1 , 1	$1 +_2 1 = 0$
5 kręgli	
4	1
3	3
1 , 3	$1 +_2 3 = 2$
1 , 2	$1 +_2 2 = 3$
2 , 2	$2 +_2 2 = 0$
6 kręgli	
5	4
4	1
1 , 4	$1 +_2 1 = 0$
1 , 3	$1 +_2 3 = 2$
2 , 3	$2 +_2 3 = 1$
2 , 2	$2 +_2 2 = 0$
7 kręgli	
6	3
5	4
1 , 5	$1 +_2 4 = 5$
1 , 4	$1 +_2 1 = 0$
2 , 4	$2 +_2 1 = 3$
2 , 3	$2 +_2 3 = 1$
3 , 3	$3 +_2 3 = 0$

Pozycja	Liczba Grundy'ego
8 kręgli	
7	2
6	3
1 , 6	$1 +_2 3 = 2$
1 , 5	$1 +_2 4 = 5$
2 , 5	$2 +_2 4 = 6$
2 , 4	$2 +_2 1 = 3$
3 , 4	$3 +_2 1 = 2$
3 , 3	$3 +_2 3 = 0$
9 kręgli	
8	1
7	2
1 , 7	$1 +_2 2 = 3$
1 , 6	$1 +_2 3 = 2$
2 , 6	$2 +_2 3 = 1$
2 , 5	$2 +_2 4 = 6$
3 , 5	$3 +_2 4 = 7$
3 , 4	$3 +_2 1 = 2$
4 , 4	$1 +_2 1 = 0$
10 kręgli	
9	4
8	1
1 , 8	$1 +_2 1 = 0$
1 , 7	$1 +_2 2 = 3$
2 , 7	$2 +_2 2 = 0$
2 , 6	$2 +_2 3 = 1$
3 , 6	$3 +_2 3 = 0$
3 , 5	$3 +_2 4 = 7$
4 , 5	$1 +_2 4 = 5$
4 , 4	$1 +_2 1 = 0$

W grze KRĘGLE, którą opisaliśmy przed miesiącem, sumy gier pojawiają się w naturalny sposób. Pełne zrozumienie gry polega, jak zwykle, na wyznaczeniu liczby Grundy'ego $k(n)$ pozycji złożonej z n kręgli ustawionych obok siebie.

Bez trudu ustalamy, że $k(0) = 0$, $k(1) = 1$ i $k(2) = 2$, gdyż w tych przypadkach gra KRĘGLE nie różni się od gry NIM. W pozycji złożonej z 3 kręgli mamy 3 możliwości wykonania ruchu (ruchy prowadzące do identycznych pozycji utożsamiamy). Ruchy te przedstawione są w tabeli obok. Możemy strącić dwa kręgle, pozostawiając jeden (liczba Grundy'ego takiej pozycji wynosi 1). Możemy strącić jeden kręgiel, przy czym może to być kręgiel skrajny (pozostają wtedy dwa kręgle stojące obok siebie) lub środkowy (co prowadzi do pozycji złożonej z dwóch samotnie stojących kręgli). Prowadzi to do pozycji o liczbie Grundy'ego odpowiednio 2 i 0. Zatem $k(3) = 3$, gdyż 3 jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną niewystępującą wśród liczb 0, 1 i 2.

Podobnie postępujemy w celu wyznaczenia dalszych wartości $k(n)$.

Z powyższych rozważań można otrzymać wartości $k(n)$ dla $n \leq 10$. Dla przykładu przyjrzyjmy się analizie pozycji złożonej z 8 kręgli. Istnieje 8 możliwości wykonania ruchu. Możemy strącić jeden lub dwa kręgle z brzegu, pozostawiając 6 lub 7 kręgli stojących obok siebie. Możemy też strącić jeden lub dwa kręgle, dzieląc pozostałe kręgle na dwie grupki. Prowadzi to do pozycji mających liczbę Grundy'ego 0, 2, 3, 5 i 6. Tak więc $k(8) = 1$, gdyż 1 jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną niewystępującą wśród wyżej wymienionych.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl